

## **Inhalt:**

### **I. Vorwort (S. 3)**

### **II. Das Laplace-Experiment als Grundlage der Berechnungen (S. 4)**

1. Kartenverteilung als Laplace-Experiment (S. 4)
2. Binomialkoeffizienten, Sie (S. 4)

### **III. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und Signifikanztest für die Anzahl der erhaltenen Trümpfe (S. 6)**

1. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung (S. 6)
2. Signifikanztest (S. 8)

### **IV. Ausgewählte Spielsituationen (S. 12)**

1. Stehen die Wenzeln auseinander? (S. 12)
2. Lläuft die Sau? (S. 15)
3. Risiko beim Tout (S. 16)

### **V. Schluß (S. 19)**

### **VI. Anhang (S. 20)**

1. Quellen (S. 20)
2. Ausführliche Rechenwege (S. 21)
3. Regelwerk (S. 24)

## I. Vorwort

Das Schafkopf ist nicht nur ein Stück bayrischen Brauchtums, sondern auch ein sehr interessantes und durch seine Rufspiele einmaliges Kartenspiel, das mit einer unüberschaubaren Vielfalt an Spielsituationen immer wieder aufs neue eine Herausforderung darstellt.

Wie die meisten Kartenspiele vereint es grundsätzlich Komponenten des Glücks- und des Geschicklichkeitsspiels. Die Zufälligkeit der Kartenverteilung ist dabei maßgeblich für den Glücksspielanteil, da jedoch alle Karten gegeben werden, bleibt es für den einzelnen Mitspieler bis zu einem gewissen Grad berechenbar. Die Reihenfolge, in der die Karten ausgespielt werden bestimmt jeder selbst, womit er das Spiel in einer für ihn günstigen Richtung beeinflussen kann.

Wie die Karten verteilt sind, unterliegt jedoch dem Zufall, dem man sich durch mathematische Methoden nähern kann. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis ist dabei berechenbar. Dazu betreibt man Stochastik, also die mathematische Disziplin, die sich mit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten befasst.

Das Ziel dieser stochastischen Betrachtung ist die Beschaffung zusätzlicher Informationen über wahrscheinliche Kartenverteilungen, die der erfahrene Spieler zwar im Gefühl hat, jedoch nicht in konkreten Zahlen zum Ausdruck bringen kann, da Erfahrungen zum Teil sehr subjektiv sind.

Diese neuen Informationen dienen der Ausarbeitung von neuen Gewinnstrategien oder sind einfach wissenswert und interessant. Eine individuelle, gute Strategie hilft dem Spieler aus seinen Handkarten größtmögliches Kapital zu schlagen, bzw. bei schlechten Kartenverteilungen größeren Schaden abzuwenden.

Nun noch einige Hinweise vor der weiteren Lektüre der Facharbeit: Für das Verständnis sind grundsätzlich keine mathematischen Kenntnisse notwendig, da die Ergebnisse besprochen werden. Es kann also auch ein mathematischer Leih davon profitieren. Die Kenntnis der Regeln des Schafkopfs ist hingegen grundlegend. Eine ausführliche Anleitung für das Schafkopf finden sich unter dem Register „Spielanleitung“.

Um auch die Rechenwege verstehen zu können, sind grundlegende Kenntnisse der Stochastik und Kombinatorik notwendig. Die Facharbeit kann daneben dazu dienen sich mit der Mathematik der Kartenspiele vertraut zu machen und sich mit Hilfe von zusätzlicher Literatur noch tiefer in die Stochastik einzuarbeiten.

Damit zumindest eine gewisse Überschaubarkeit gewährleistet bleibt, gehe ich ausschließlich auf den reinen Schafkopf ein.

## II. Das Laplace - Experiment als Grundlage der Berechnungen

### 1. Kartenverteilung als Laplace-Experiment

Grundlage für jede Rechnung ist die Annahme, dass ein sogenanntes Laplace - Experiment vorliegt. Das heißt, dass alle möglichen Ausgänge eines Experimentes, hier alle denkbaren Kartenverteilungen, dem Zufall gehorchend, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, oder konkret, dass mit ungezinkten Karten gespielt wird und jeder ordentlich mischt.

Bei Laplace – Wahrscheinlichkeiten setzt man grundsätzlich die Wahrscheinlichkeit  $P$  für ein Ereignis  $E$  wie folgt an: Man teilt alle möglichen Ausgänge, die zu  $E$  führen, durch die Anzahl aller möglichen und definitionsgemäß gleich wahrscheinlichen Ausgänge und kommt dadurch zu der für einen Großteil der Berechnungen eingesetzte Formel:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$$

(vgl. FS, S. 107)

Diese Formel kann man sich auch leicht anhand der vier Ober veranschaulichen: Sie werden verdeckt auf die 4 Spieler verteilt. Die Wahrscheinlichkeit, den Alten Ober zu bekommen ist dabei augenscheinlich 25%. Oder mit der Formel: Einer der Ober ist der Alte und es gibt 4 Ober. Also ist die Wahrscheinlichkeit den Alten zu erhalten

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \underline{25\%} .$$

### 2. Binomialkoeffizienten, Sie

Für die Berechnung der Mächtigkeit des Ereignisraumes  $\Omega$  benötigt man ein mathematisches Hilfsmittel, die Binomialkoeffizienten. Da die Anzahl der Möglichkeiten hier rasch mehrere Millionen überschreitet und dann einfaches Abzählen, wie im obigen Beispiel, nicht mehr zum Ziel führt.

Wichtig ist dazu die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten für die Handkarten zu kennen. Dabei hilft eine einfache Überlegung: Für die erste Karte gibt es 8 Plätze, aus

denen man auswählen kann, für die zweite nur noch 7 usw. Das heißt also, es gibt allein

$$x = 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \underline{40320}$$

Möglichkeiten, die Handkarten anzuordnen bzw.

$$x = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 := n!$$

mögliche Reihenfolgen für n unterscheidbare Elemente.

Will man allerdings alle Möglichkeiten, Handkarten zu bekommen, erhalten, geht es vielmehr um die Frage, auf wie viele Kombinationsmöglichkeiten man 8 aus 32 Karten auswählen kann. Die Reihenfolge ist dabei zu vernachlässigen, da die Karten ohnehin beliebig zusammengesteckt werden dürfen.

Die Taktik ist prinzipiell wieder die gleiche: Für die erste Karte kann man aus 32 Karten wählen, für die zweite aus 31 usw.:

$$x = 32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 26 \cdot 25 \approx \underline{4,24 \cdot 10^{11}} = 424Mrd$$

Oder allgemein k aus n Karten unter Beachtung der Reihenfolge

$$x = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Jetzt muss nur noch die Reihenfolge herausgerechnet werden, indem man durch die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten dividiert:

$$x = \frac{32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 24}{8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{32!}{(32-8)!8!} = \binom{32}{8} = \underline{10518300} \approx 10,5Mio$$

Übrig bleiben immer noch unvorstellbar viele Möglichkeiten Handkarten zu bekommen. Die allgemeine Formel lautet hierzu:

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} := \binom{n}{k}; \text{ (vgl. FS, S.13)}$$

( $|\Omega|$  bezeichnet die Mächtigkeit eines Ereignisraumes)

Da ein Sie eine bestimmte Kartenkombination voraussetzt, hat man statistisch nur jedes 10.518.300ste Spiel alle Unter und Ober. Das entspricht mit eins zu mehr als 10,5 Millionen in etwa der Wahrscheinlichkeit eines Lottosechlers (1 zu annähernd 14 Mio.). Damit ist ein Sie aber auch nur genau so unwahrscheinlich wie jedes andere, bestimmte Blatt auch.

Wenn man noch einen Schritt weitergeht, kommt man auf alle mögliche Ausgangslagen  $|\Omega_{Gesamt}|$  nach dem Geben der Karten:

$$|\Omega_{\text{Gesamt}}| = \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \cdot 4! \cdot 4 = \underline{9,558 \cdot 10^{18}}$$

(Spieler 1 bekommt als erster Karten, aus den verbleibenden kann Spieler 2 auswählen ect. auf 4! Möglichkeiten kann man sich an einen Tisch setzen bzw. die Kartensätze vertauschen; 4 Geberpositionen)

Anschaulich hieße das: Selbst wenn alle 6 Milliarden Menschen auf der Erde mitspielen würden, bräuchte man immer noch rund 60.616 Jahre (vgl. Anhang VI.2) um alle sich ergebenden Möglichkeiten durchzuspielen, wenn man pro Spiel 5 Minuten berechnet (beinhaltet bereits kleine Pausen) und ohne Unterbrechung 24 Stunden am Tag gespielt wird.

Sorgen, dass das Schafkopfen auf die Dauer langweilig werden könnte, sind also vollkommen fehl am Platz, da praktisch kein Spiel wie das andere ist.

### **III. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und Signifikanztest für die Anzahl der erhaltenen Trümpfe**

#### 1. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

An manchen sonst vielleicht sehr gemütlichen Abenden stellt man sich nach einigen Spielen, bei denen man kaum oder gar keine Trümpfe hatte, die quälende Frage, ob hier noch alles mit rechten Dingen zugeht. Die folgende Aufstellung hilft in solchen Fällen zwar nur bedingt weiter, zeigt jedoch, dass nichts unmöglich ist. Hier kann man sehr schön die Auswirkungen des Zufalles an den eigenen Handkarten beobachten und mit einer gewissen Sicherheit erkennen, ob ein Mitspieler die anderen beim Geben hintergeht.

##### i) Anzahl X der erhaltenen Trümpfe:

Die reine Anzahl der Trümpfe ist vor allem für das häufigste Spiel, das Rufspiel, wichtig. Deshalb auch die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl von Trümpfen zu erhalten für die Spielsituation Rufspiel, d.h. 14 der 32 Karten sind Trümpfe, die restlichen 18 Karten werden ebenso wie alle Trümpfe gleich behandelt.

Daneben ist es für die folgenden Rechnungen wichtig, die Wahrscheinlichkeiten zu kennen, mit denen eine bestimmte Anzahl von Trümpfen auftritt. Dafür kann man folgenden, allgemeinen Ansatz verwenden:

$$P(X) = \frac{\binom{14}{X} \cdot \binom{18}{8-X}}{\binom{32}{8}} \quad \text{mit } X \in \mathbb{N} \text{ und } X \in [0; 8]$$

(alle Kombinationsmöglichkeiten X der 14 Trümpfe und 8-X weitere Handkarten zu erhalten geteilt durch alle Möglichkeiten, 8 aus 32 Karten auszuwählen)

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit keinen Trumpf zu erhalten

$$P(X = 0) = \frac{\binom{14}{0} \cdot \binom{18}{8-0}}{\binom{32}{8}} = \underline{0,416\%} .$$

Anschaulich bedeutet das, dass man im Mittel rund jedes 240ste Spiel keinen Trumpf erhält. Dies stellt jedoch keineswegs in jedem Fall einen Nachteil dar, da man dann schon von Anfang an Trumpf-frei ist.

Alle anderen Ergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Tabelle 1:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X) gerundet, in %	0,416	4,236	16,061	29,651	29,121	15,531	4,368	0,587	0,029

### ii) Erwartungswert für die erhaltenen Trümpfe:

Von nur geringem Nutzen, dafür mathematisch sehr interessant ist  $E(X)$ , der Erwartungswert, also das sich langfristig einstellende Mittel der Anzahl der Trümpfe, die man pro Spiel erhält.

Dabei gilt:

$$E(X) := \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + \dots + n \cdot P(X = n)$$

(vgl. FS, S.108)

Der Erwartungswert für die Zufallsgröße  $X$ , die Anzahl der Trümpfe ist also

$$E(X) = 0 \cdot 0,00416 + 1 \cdot 0,04236 + 2 \cdot 0,16061 + \dots + 8 \cdot 0,00029 = \underline{3,5}$$

Viel schneller kommt man zu diesem Ergebnis, wenn man sich alle Trümpfe gleichmäßig auf die vier Mitspieler verteilt vorstellt, was beim Karten geben passiert:

$$E(x) = \frac{14}{4} = \underline{3,5} \quad (14 \text{ Trümpfe verteilt auf } 4 \text{ Spieler})$$

### iii) Varianz und Standardabweichung für die Anzahl der Trümpfe:

Die Varianz ist das Maß für die Streuung einer Zufallsgröße um den Erwartungswert. Sie besitzt allerdings keine konkrete Bedeutung. Dabei werden Treffer, die stärker vom Erwartungswert abweichen stärker bewertet als solche, die nur geringfügig daneben liegen, da die Abweichung quadratisch einfließt.

$$VarX = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i) \approx \underline{1,524} \quad (\text{vgl. FS, S. 108; aus-}$$

föhrlicher Rechenweg siehe VI.2)

Um einen Wert zu bekommen, der die im langfristigen Mittel zu erwartende Abweichung vom Erwartungswert beschreibt, zieht man aus der Varianz die Wurzel. Diesen Wert nennt man Standardabweichung.

$$\sigma = \sqrt{VarX} \approx \sqrt{1,524} \approx \underline{1,235} \quad (\text{vgl. FS, S.108})$$

Wie man diesem Wert und der Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Anzahl von Trümpfen entnehmen kann, erhält man meistens 2 bis 5 Trümpfe.

Die Wahrscheinlichkeit in diesem Bereich,  $E(X) \pm \sigma$ , zu liegen beträgt geringfügig mehr als 90% (vgl. Tabelle 1), was die Varianz als Größe für die Streuung bestätigt..

## 2. Signifikanztest

Bei diesem Signifikanztest geht es in erster Linie darum, Falschspieler zu entdecken, die sich selbst bessere Karten geben, als es dem Zufall nach sein dürfte. Der Einfachheit halber beschränke ich mich dabei auf die Überprüfung der Anzahl  $Y$  der Ober, die sich ein bestimmter Gegenspieler im Verlauf mehrerer Spiele selbst gibt. Dies ist nicht nur von der Rechnung her weniger aufwendig, sondern auch praktisch leichter überprüfbar, da es nicht so viele Ober wie Trümpfe gibt und sie daher leichter mitgezählt werden können.

Bei einem Signifikanztest stellt man eine Hypothese  $H_0$  auf, die entweder angenom-

men oder abgelehnt wird. Eine wichtige Rolle spielt dabei der Annahmehbereich, in dessen Rahmen man die Hypothese annimmt. Es geht also im Folgenden darum einen geeigneten Annahmehbereich zu finden, um einen Spieler nicht ungerechtfertigter Weise des Falschspieles zu beschuldigen, aber trotzdem schon möglichst geringfügige Manipulationen des Spieles nachweisen zu können. Was wiederum auf ein Optimierungsproblem hinaus läuft.

#### i) Signifikanztest für drei oder vier Ober

Hierzu wird ein Mitspieler während einer abendfüllenden Runde beobachtet. Der Test habe die Kettenlänge 10, das heißt der betreffende Spieler ist 10 Mal Geber. Von diesen 10 Spielen merkt man sich die Anzahl  $Z$  jener Spiele, bei denen der Mitspieler drei oder vier Ober erhält.

Für eine mathematische Behandlung dieses Problems ist es zunächst notwendig, die Wahrscheinlichkeit zu kennen, mit der man gemäß Laplace eine bestimmte Anzahl von Obern erhält, wobei die Rechnung analog zu III.1.i) ist:

$$P(Y) = \frac{\binom{4}{Y} \cdot \binom{28}{8-Y}}{\binom{32}{8}}$$

(alle Kombinationsmöglichkeiten,  $Y$  der 4 Ober und  $8-Y$  weitere Handkarten zu erhalten dividiert durch alle Möglichkeiten, 8 aus 32 Karten auszuwählen)

Die Werte sind der Tabelle zu entnehmen:

Tabelle 2:

<b>Y</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
P(Y) gerundet, in %	29,549	45,028	21,491	3,737	0,195

Die Wahrscheinlichkeit  $p$  3 oder 4 Ober zu bekommen beträgt also

$$p = P(3) + P(4) \approx \underline{3,932\%} .$$

Als nächstes stellt man die Hypothese  $H_0$  auf. Als Annahme geht man davon aus, dass der betreffende Mitspieler korrekt mischt, also  $p = 3,932\%$  . Man nimmt die Hy-

pothese im Annahmehbereich  $A = [0; k]$  an, im Bereich von  $\bar{A} = [k + 1; 10]$  wird sie abgelehnt. Was heißt, dass man davon ausgeht, dass das Spiel manipuliert wird.

Dabei sind zwei Arten von Fehler möglich:

- $\alpha$ , der Fehler 1. Art. Hierbei nimmt man irrtümlicher Weise an, es würde korrekt gespielt, obwohl dies nicht der Fall ist.
- $\beta$ , der Fehler 2. Art. Er ist das Gegenteil des Fehlers 1. Art. Man nimmt irrtümlicher Weise an, ein Mitspieler sei ein Falschspieler.

Fehler 2. Art sind möglichst gering zu halten, da Falschspielen eine schwerwiegende Anschuldigung darstellt. Also wird  $k$  so bestimmt, dass der Fehler 2. Art nur mit 1% Wahrscheinlichkeit eintritt. Das heißt, die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, für die  $Z \geq k$  gilt, soll unter 1% liegen. Mittels einer kumulativen Binominalverteilung kann man bestimmen, wie wahrscheinlich es ist 0 bis  $k$  Mal viele Ober zu erhalten.

Zunächst allerdings die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse,  $Z$  Mal 3 oder 4 Ober zu erhalten, berechnet mit Hilfe der Binomialverteilung:

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{vgl. FS, S. 110})$$

$$\Rightarrow P(Z) = \binom{10}{Z} \cdot p^Z \cdot q^{10-Z}$$

( $q = 1 - p$ , also die Wahrscheinlichkeit für einen Nicht – Treffer;  $\binom{10}{Z}$  ist die Anzahl der Möglichkeiten  $Z$  Treffer auf 10 Versuche zu verteilen und  $p^Z \cdot q^{10-Z}$  die Wahrscheinlichkeit dafür erst  $Z$  Treffer und dann  $10 - Z$  Nicht – Treffer zu erzielen)

Die Ergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Tabelle 3:

<b>Z</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
P(Z) gerundet, in %	66,956	27,405	5,047	0,551	0,039	0,002

Die fehlenden Werte sind kleiner 0,0001%

Daraus ergeben sich die kumulativen Wahrscheinlichkeiten mittels der Addition aller Wahrscheinlichkeiten für die gilt  $Z \leq k$  :

$$F_p^n(k) := \sum_{i=0}^k B(n; p; i); \quad \Rightarrow F_p^{10}(k) = \sum_{i=0}^k P(Z = i)$$

Tabelle 4:

<b>k</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
$F_p^n(k)$ gerundet, in %	66,956	94,361	99,408	99,959	99,998	100

Mit der Kenntnis darüber, wie wahrscheinlich es ist bis zu  $k$  Mal 3 oder mehr Ober zu erhalten, kann man sich dem eigentlichen Problem über das Gegenereignis nähern:

$$\beta = 1 - F_p^n(k) \leq 0,01$$

$$\Rightarrow F_p^n(k) \geq 0,99$$

Der erste Wert von  $k$  für den diese Beziehung gilt ist  $k = 2$ .

Das heißt also, wenn ein Spieler öfter als 2 Mal in 10 Spielen 3 oder 4 Ober erhält, kann man ihn mit einer Sicherheit von mehr als 99% als Falschspieler denunzieren.

#### ii) Signifikanztest für die Summe aller Ober

Von der Idee her unterscheidet sich dieser Signifikanztest kaum vom vorherigen. Nur dass hier nicht nur die wenigen Spiele betrachtet werden, in denen ein Spieler 3 oder 4 Ober erhalten hat, sondern alle Ober, die er im Verlauf des Tests erhält, aufsummiert werden, was die Genauigkeit gegenüber dem vorherigen Test erhöht. Die anfallende Datenmenge (insgesamt  $5^{10} = \underline{9765625}$  Einzelwahrscheinlichkeiten!) zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spieler  $n$  Ober erhält, ist jedoch nicht mehr ohne die Verwendung eines Computers zu bewältigen, da es sich dabei nicht um eine binomial verteilte Zufallsgröße handelt. Das eigens zu diesem Zweck erstellte Programm „pr\_MM.exe“ berechnet für jede mögliche Konstellation von Obern die Wahrscheinlichkeit und summiert die Konstellationen auf, die die gleiche Anzahl  $n$  von Obern ergeben. Für  $n = 1$  beispielsweise alle 10 Einzelwahrscheinlichkeiten 9 Mal keinen und 1 Mal 1 Ober zu erhalten.

Die so errechneten Ergebnisse sind den folgenden Tabellen zu entnehmen:

Tabelle 5, Wahrscheinlichkeiten, eine bestimmte Anzahl  $n$  von Obern zu erhalten in %:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
W(n)	0,0005	0,0077	0,0567	0,2668	0,9042	2,3536	4,8963	8,3645	11,9654	14,5445	15,1911	13,7535

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
W(n)	10,8688	7,5385	4,6092	2,4928	1,1958	0,5098	0,1934	0,0653	0,0197	0,0053	0,0013	0,0003

Tabelle 6, kumulative Wahrscheinlichkeiten in %:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
MW(n)	0,0005	0,0082	0,0649	0,3317	1,2359	3,5895	8,4858	16,8503	28,8157	43,3602	58,5513	72,3048

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
MW(n)	83,1736	90,7121	95,3213	97,8141	99,0099	99,5197	99,7131	99,7784	99,7981	99,8034	99,8047	99,805

Auch hier geht es im Endeffekt darum, ab wie vielen Obern man mit einer Sicherheit von 99% behaupten kann, es handle sich um einen Fall von Manipulation. Dafür setzt man  $MW(n) \geq 0,99$ . Daraus ergibt sich, dass man es für  $n \geq 16$  aller Wahrscheinlichkeit nach mit einem Falschspieler zu tun hat. Allerdings ist auch hier Vorsicht geboten, dass einem nicht der Zufall ein Schnippchen schlägt und man jemanden nur wegen etwas Kartenglück unrechtmäßiger Weise beschuldigt.

#### IV. Ausgewählte Spielsituationen

##### 1. Stehen die Wenzen auseinander?

Hier soll geklärt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit die übrigen Wenzen auseinander stehen, wenn man selbst einen oder zwei besitzt.

Die Frage stellt sich vor allem bei Wenzen, die auf einer langen Farbe basieren oder bei einem Wenz - Tout mit nur zwei Untern, dem Alten Unter und entweder Schellen oder Herz Unter, der aber bei einem Turnier nicht gespielt werden dürfte.

i) Spiel mit zwei Wenzen

Im einfacheren Fall hat der Spieler bereits zwei Wenzen. Für die Rechnung sind allerdings nur die Karten der Gegenspieler von Bedeutung:

Die Anzahl aller möglichen Kartenverteilungen, die zum Ereignis Z, die Unter stehen zusammen, führen, wird durch die Gesamtzahl der gleich wahrscheinlichen Kartenverteilungen geteilt. Dabei gilt:

$$|\Omega_{3\text{Spieler}}| = \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} = \underline{9465511770}$$

(24 Karten werden beliebig auf drei Spieler verteilt)

$$|\Omega_Z| = \binom{2}{2} \cdot \binom{22}{6} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \cdot 3 = \underline{2880807930}$$

(Die zwei übrigen Wenzen und sechs weitere der 22 noch verbleibenden Karten für Gegenspieler 1; die übrigen Karten werden auf die anderen Gegenspieler verteilt; multipliziert mit 3, da jeder die beiden Wenzen haben könnte)

$$P(Z) = \frac{|\Omega_Z|}{|\Omega_{3\text{Spieler}}|} = \frac{3 \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{22}{6} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}}{\binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}} = \frac{3 \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} = \underline{30,435\%}$$

Um auf die Wahrscheinlichkeit, dass die Wenzen auseinander stehen zu kommen, muss davon das Gegenereignis errechnet werden:

$$P(A) = P(\bar{Z}) = 1 - P(Z) \approx \underline{69,565\%}$$

Dieses Ergebnis bestätigt die Erfahrung, dass die Wenzen meist auseinander stehen, es jedoch in denen Fällen, in denen sie zusammen stehen zu herben Verlusten kommt, wenn sich dann zum Pech auch noch Unglück gesellt. Die Entscheidung, ein derartiges Spiel zu spielen, sollte konsequenter Weise zusätzlich von den übrigen Handkarten und anderen Begleitumständen, wie der Geberposition, abhängig gemacht werden. Ein derartiges Spiel auf Tout zu spielen ist leichtsinnig, da der nur geringfügig höhere Gewinn im Falle eines Sieges in keinem Verhältnis zu dem zu erwartenden Verlust steht, wenn die Wenzen zusammen stehen und man gespritzt wird und verliert. Außerdem kann man selbst im schlechtesten Fall davon ausgehen, dass die Gegenpartei trotzdem Schneider wird.

ii) Spiel mit nur einem Wenz

Die Rechnung verläuft grundsätzlich analog zur vorhergehenden, allerdings sind zusätzliche Verteilungsvarianten bei den Gegenspielern zu berücksichtigen. Es ist dabei zu unterscheiden, ob 2 oder 3 Wenzen zusammen stehen bzw., ob sie gleichmäßig verteilt sind. Dabei gilt:

$$|\Omega_3| = 3 \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{21}{5} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} = \underline{785674890}$$

(3 Gegenspieler; 3 Unter und 5 beliebige Karten für einen der Gegenspieler, die restlichen Karten werden beliebig verteilt)

$$|\Omega_2| = 3! \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{6} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{8} = \underline{6285399120}$$

(Es gibt 3! mögliche Anordnungen für die Gegenspieler; Gegenspieler 1 erhält 2 der 3 verbleibenden Unter, Gegenspieler 2 erhält den letzten Unter; die restlichen Karten werden beliebig verteilt)

$$|\Omega_{verteilt}| = \binom{3}{1} \cdot \binom{21}{7} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{14}{7} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{7} = 3! \cdot \binom{21}{7} \cdot \binom{14}{7} = \underline{2394437760}$$

(jeder Gegenspieler erhält einen Unter; die restlichen Karten werden verteilt; bzw. es gibt 3! mögliche Verteilungen für die Unter, der Rest wie zuvor)

$$P(\text{"Verteilung"}) = \frac{|\Omega_{Teilbereich}|}{|\Omega_{3Spieler}|} \quad (\text{Laplace - Wahrscheinlichkeit})$$

Tabelle 7:

Verteilung	3 Zusammenstehende	2 Zusammenstehende	Verteilt
P(„Verteilung“), gerundet	8,3004%	66,4032%	25,2964%

An den Ergebnissen lässt sich sehr schön ablesen, dass das Risiko, dass ein Gegenspieler alle drei übrigen Unter hat mit deutlich unter 10% relativ gering ist. Bei einem Spiel automatisch davon auszugehen, dass alle Wenzen auseinander stehen, ist augenscheinlich riskant, womit die Ergebnisse wiederum die Erfahrung bestätigen, dass man mit ausreichend guten Handkarten und etwas Glück durchaus einen Wenz mit nur einem Unter gewinnen kann. Solche Spiele bleiben aber bis zu einem hohen Grad unberechenbar.

## 2. Läuft die Sau?

Zur Beantwortung dieser Frage, muss man sehr viele Prämissen machen, da in nahezu jeder Spielsituation eine Farbe angespielt werden kann und die Anzahl der Spielsituationen gegen unendlich geht.

Um dennoch eine befriedigende Antwort zu finden, gehe ich von einer auf möglichst viele Spielsituationen übertragbare Situation aus, dem Herz Solo, bei dem der Spieler die Gras - Sau ausspielt. Die Sau läuft dann in den Fällen, in denen alle Gegenspieler Gras haben. Nicht berücksichtigt wird dabei allerdings, dass der betreffende Gegenspieler zusätzlich auch Trumpf - frei sein könnte, womit die Sau wieder laufen würde. Zur Differenzierung der Antwort wird die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der zusätzlichen Gras - Karten, die der Spieler neben dem As auf der Hand hat, berechnet. Dieses Szenario lässt sich problemlos auf andere Farbkombinationen übertragen, kann jedoch durchaus auch für andere Spielsituationen als Richtwert dienen.

Vor allem das Rufspiel stellt eine Ausnahme dar, da es mit seinen zusätzlichen Informationen und der vorherrschenden Taktik des Spielers, zunächst die Gegenpartei Trumpf - frei zu machen hoch komplex und „unberechenbar“ ist.

Zweckmäßig ist eine Vorüberlegung für  $n = 3, 4, 5$ , also dafür, dass der Spieler neben der Gras - Sau noch mehr als 3 weitere Gras besitzt: Es verbleiben schlicht nicht genügend Gras, dass jeder Gegenspieler wenigstens eines haben könnte. Die As kann in diesem Fall gar nicht laufen. Die Rechnung erübrigt sich folglich und erfolgt statt dessen ausschließlich für  $n = 0, 1, 2$ .

Das Gegenereignis, mindestens ein Spieler ist Gras - frei, ist wiederum leichter zu berechnen, als die Verteilungen, die dazu führen, dass jeder Gegenspieler mindesten ein Gras besitzt. Dabei sind nur die Handkarten der Gegenspieler von Interesse:

$$|\Omega_{3\text{Spieler}}| = \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \quad (\text{vgl. IV.1})$$

$$|\Omega_{\text{frei}}(n)| = 3 \cdot \binom{5-n}{0} \cdot \binom{R(n)}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} = 3 \cdot \binom{5-n}{0} \cdot \binom{19+n}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} =$$

$$= 3 \cdot \binom{19+n}{8} \cdot \binom{16}{8}$$

(3 Gegenspieler, keines der verbleibenden Gras, 8 der restlichen Karten  $R(n)$ , die übrigen Karten werden beliebig auf die beiden anderen Gegenspieler verteilt; nähere Erläuterung von  $R(n)$ , den Restlichen Karten, aus denen der freie Gegenspieler auswählen kann im Anhang VI.2; Vereinfachungen)

Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dann wie gewohnt nach Laplace:

$$P(\text{"frei"}(n)) = \frac{|\Omega_{\text{frei}}(n)|}{|\Omega_{3\text{Spieler}}|} = \frac{3 \cdot \binom{19+n}{8} \cdot \binom{16}{8}}{\binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8}} = \frac{3 \cdot \binom{19+n}{8}}{\binom{24}{8}}$$

Die As läuft, wenn das Gegenereignis von „mindestens ein Gegenspieler ist frei“ eintritt.

$$P(\text{"läuft"}(n)) = \overline{P(\text{"frei"}(n))} = 1 - P(\text{"frei"}(n))$$

Die konkreten Ergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Tabelle 8:

<b>n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
P(„frei“(n) gerundet in %	30,830	51,383	83,004
P(„läuft“(n) gerundet in %	69,170	48,617	16,996

### 3. Risiko beim Tout

Es gibt sehr viele Handkarten, bei denen ein Tout - Spiel in Betracht gezogen oder gespielt wird. - Dass diese nicht all zu oft vorkommen ist ein anderes Thema. - Die narrensicheren Fälle, wie etwa alle Wenzeln und zwei Asse mit zugehörigem Zehner im Auswurf, sind mathematisch gesehen uninteressant, da man sie ohnehin sicher gewinnt. Wesentlich interessanter sind Fälle, in denen bestimmte Trümpfe fallen müssen, um den Tout zu gewinnen. Auch hierfür sind die möglichen Kartenverteilungen unüberschaubar groß. Ich beschränke mich also auf eine ausgesuchte Situation, für die die Gewinnchancen berechnet werden können:

Ein Solo, bei dem der Spieler ausschließlich Trumpf, davon  $n$  Laufende auf der Hand hat, und das somit prinzipiell für einen Tout geeignet ist. Für die Rechnung ist es wichtig, dass der Spieler selbst im Auswurf ist, damit er mit seinen Laufenden anziehen kann. Ansonsten muss man von den Laufenden einen abziehen, um sicher einstecken zu können.

Zunächst wieder eine Überlegung, wie viele Läufer benötigt werden: Wenn man den Alten Ober anspielt, fallen bestenfalls 4 Trümpfe. Nämliches gilt für den Gras Ober usw. Da der Spieler bereits 8 der 14 Trümpfe auf der Hand hat bedeutet das, dass die übrigen 6 Trümpfe auf die Gegenspieler verteilt sind. Diese 6 Trümpfe können frühestens nach dem zweiten Mal Anziehen komplett gefallen sein. Nur mit dem Alten hat man einen Tout quasi schon verloren, es sei denn, der Gras – Ober steht blank und man kann dann nochmals anziehen.

Daneben ist auch interessant ab wie vielen Läufern der Tout sicher gewonnen ist. Dies ist ab 6 Laufenden der Fall, da, selbst wenn alle 6 verbleibenden Trümpfe auf einen Gegenspieler konzentriert sind, dieser nach sechsmaligem Anziehen keine Trümpfe mehr haben kann.

Es wird die Kartenverteilung bei den Gegenspielern betrachtet mit:

$$|\Omega_{3\text{Spieler}}| = \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \quad (\text{vgl. IV.1})$$

Dass ein Gegenspieler  $x$  der verbleibenden Trümpfe auf sich vereint, läßt sich auf folgende Anzahl von Möglichkeiten darstellen:

$x=6$ :

$$|\Omega_6| = 3 \cdot \binom{6}{6} \cdot \binom{18}{2} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}$$

$x=5$ :

$$|\Omega_5| = 3! \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{18}{3} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{8}$$

$x=4$ :

$$|\Omega_4| = 3! \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{18}{4} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{14}{6} \cdot \binom{8}{8} + 3 \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{18}{4} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{14}{7} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{7}$$

$x=3$ :

$$|\Omega_3| = 3! \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{18}{5} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{13}{6} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{7} + 3 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{18}{5} \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{8}$$

$x=2$ :

$$|\Omega_2| = \binom{6}{2} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{6}$$

( $x$  der Trümpfe für den Gegenspieler mit den meisten Trümpfen, die anderen Karten

werden geeignet verteilt; hinzu kommen ggf. noch unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten)

$P(x_i)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis, der Gegenspieler mit den meisten Trümpfen hat  $x_i$  Trümpfe auf der Hand eintritt.

$$P(x_i) = \frac{|\Omega_i|}{|\Omega_{Gesamt}|} \quad (\text{Laplace - Wahrscheinlichkeit})$$

Die interessanten, da auch für andere Spiele mit 8 Trümpfen zutreffenden Werte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Tabelle 9:

x	6	5	4	3	2
P(x) gerundet in %	0,0624	1,9971	18,7227	62,9083	16,3095

Um den jeweiligen Tout sicher für sich entscheiden zu können ist es erforderlich, mit den vorhandenen Läufern die Gegenpartei Trumpf - frei machen zu können. Somit sollte die Anzahl n der Läufer mindestens ebenso groß wie die Anzahl x der Trumpfkarten des Gegenspielers mit den meisten Trümpfen sein, also  $n \geq x$ . Dass dies eine hinreichende, nicht jedoch eine notwendige Bedingung für einen Sieg ist, wird nicht berücksichtigt. So könnte beispielsweise der Herz Ober blank sein und somit der Schellen Ober dem Spieler einen weiteren Stich einbringt.

Die Wahrscheinlichkeit mit n Läufern und ausschließlich Trümpfen auf der Hand die Gegenpartei Trumpf - frei zu machen ist also die Summe über die Wahrscheinlichkeiten für  $x \leq n$ :

$$P(\text{"sicherer Sieg"}) = \sum_{i=2}^n P(x_i)$$

Die Ergebnisse in tabellarischer Form:

Tabelle 10:

N	2	3	4	5	6
P(„sicherer Sieg“) gerundet in %	16,3095	79,2178	97,9405	99,9376	100

Den Ergebnissen nach ist es nicht ratsam mit weniger als 4 Laufenden einen Tout zu spielen, zumal ein Solo mit Schneider – Schwarz nur geringfügig weniger gewinn-

bringend ist und das Risiko einen Tout zu verlieren dabei umgangen werden kann.

## V. **Schluß**

Zusammenfassend kann man diese Facharbeit als ein Stück Spieltheorie betrachten. Wobei Spieltheorie die Aufgabe hat bestmögliche Strategien zu entwickeln und Strategien selbst auferlegte Verhaltensregeln sind, die dazu dienen sollen, das Spiel zumindest auf lange Sicht zu gewinnen. So, wie die möglichen Spielsituationen gegen unendlich gehen, sind auch der Anzahl der denkbaren Spielstrategien prinzipiell keine Grenzen gesetzt (vgl. R. Vogelsang: „Die mathematische Theorie der Spiele“).

Jeder Spieler entwickelt im Laufe der Zeit seine individuelle Gewinnstrategie, die mit zunehmender Erfahrung des Spielers immer differenzierter wird und damit in der Regel auch erfolgsversprechender.

Eine sorgfältige Lektüre dieser Facharbeit kann also zu einer weiteren Ausarbeitung der eigenen Strategie beitragen. Daneben sollte sie Spaß an der Stochastik im allgemeinen und an der Kombinatorik im speziellen vermittelt haben.

In diesem Sinne, viel Freude am Schafkopfen!

### Danksagung

Zuletzt möchte ich mich noch bei einigen Personen bedanken, die mich bei der Facharbeit unterstützt haben:

Dominik Hellgarter, für das Programm „pr\_MM.exe“ und viele praktische Einheiten des Schafkopfens, Adam Merschbacher, für die freundlicherweise zur Verfügung gestellten Spielregeln, sowie meiner Familie und all meinen anderen Freunden, die sich immer wieder aufs neue für eine gepflegte Runde Schafkopf begeistern konnten.

## VI. Anhang

### 1. Quellen und andere Hilfsmittel

- Taschenrechner: Modell: TI-30Xa Solar, Hersteller: Texas Instruments
- Bart, Mühlbauer, Nikol, Wörle: „Mathematische Formeln und Definitionen“; Bayrischer Schulbuch-Verlag/ J. Lindauer Verlag (Schaefer); 7. Auflage; Abk.: FS
- R. Vogelsang: „Die mathematische Theorie der Spiele“
- Programm „pr\_MM.exe“ von Dominik Hellgartner  
(siehe beiliegende CD „Quellen“)
- Schafkopfschule e. V.: „Schafkopffregel“

Internetseite

„<http://www.schafkopfschule.de/Schafkopf-Ordnung.doc>“

vom 13.01.2005, aufgerufen am 20.01.2005

## 2. Ausführliche Rechenwege

$$\text{Zu II.2: } t = \frac{|\Omega_{\text{gesamt}}| \cdot 5 \text{ min}}{\left(\frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 10^9\right) \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min/a}} \approx 60\,616a$$

Bemerkung: Anzahl der möglichen Ausgangslagen mal 5 Minuten gebrochen (Zeitbedarf) durch ein Viertel der Weltbevölkerung mal 365 Tage à 24 Stunden à 60 Minuten

Zu III.iii):

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=0}^8 (x_i - 3,5)^2 \cdot P(X = x_i) = \\ &= (0 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{0} \cdot \binom{18}{8}}{\binom{32}{8}} + (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{1} \cdot \binom{18}{7}}{\binom{32}{8}} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{2} \cdot \binom{18}{6}}{\binom{32}{8}} + (3 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{18}{5}}{\binom{32}{8}} + \\ &+ (4 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{4} \cdot \binom{18}{4}}{\binom{32}{8}} + (5 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{5} \cdot \binom{18}{3}}{\binom{32}{8}} + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{6} \cdot \binom{18}{2}}{\binom{32}{8}} + (7 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{7} \cdot \binom{18}{1}}{\binom{32}{8}} + \\ &+ (8 - 3,5)^2 \cdot \frac{\binom{14}{8} \cdot \binom{18}{0}}{\binom{32}{8}} = \\ &= \frac{1}{\binom{32}{8}} \cdot ((12,25 \cdot 43758) + (6,25 \cdot 445536) + (2,25 \cdot 1689324) + (0,25 \cdot 3118752) + (0,25 \cdot 3063060) + \\ &\quad + (2,25 \cdot 1633632) + (6,25 \cdot 459459) + (12,25 \cdot 61776) + (20,25 \cdot 3003)) = \\ &= \frac{1}{\binom{32}{8}} \cdot 16031925 \approx \underline{1,524} \end{aligned}$$

zu IV.2:

$R(n)$  sind die verbleibenden Karten aus denen der Gegenspieler, der frei ist beliebig auswählen kann.

$$R(n) = 32 - 8 - (5 - n) = 19 + n$$

(Die Anzahl der verbleibenden Karten sind alle 32 Karten abzüglich der acht Handkarten des Spielers, abzüglich der weiteren Gras - Karten, die weder Trumpf noch As sind, welche nicht bereits der Spieler in den Handkarten hat.)