# (2) Allgemeines zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die wichtigsten Beispiele

## (2.0) Einleitung

In der Vorlesung geht es ab jetzt um Stochastik, die Kunst des "guten" Vermutens, das Gebiet der Mathematik, in dem Aussagen über mit Unsicherheit behaftete Vorgänge gemacht werden. Die Aussagen bei diesen Vorgängen sind nicht mehr "sichere" Wenn-Dann-Aussagen, also nicht mehr Sätze von der Form:

"Wenn die Voraussetzung A vorliegt, tritt das Ereignis B ein."

sondern Aussagen darüber, wie wahrscheinlich unter der bestimmten Voraussetzung A das bestimmte Ereignis B (das Eintreten des Ereignisses B) ist.

Die mathematische (wissenschaftliche) Behandlung derartiger "Zufalls-Experimente" geht in der Geschichte weit zurück:
Mit Fragen über günstige oder ungünstige Erwartungen bei Glücksspielen haben sich beschäftigt:

Cardano (1501-76, "Liber de ludo aleae"),
Huygens (1629-95)
**Jakob Bernoulli** ("Ars coniectandi", 1654-1705),
**Pascal** (1623-62)
Euler (1707-83)
**Laplace** ("Théorie analytique des probabilités", 1814)

Von außerhalb der Mathematik kamen ebenfalls Versuche, den Zufall begrifflich in den Griff zu bekommen: zum Beispiel aus der Ökonomie (**Keynes, 1921**). Sie trugen wohl zur Klärung der Begriffe, nicht aber zu einer Grundlegung der Theorie bei.
Der Versuch, die Wahrscheinlichkeit in einer Theorie abzuhandeln, und ein Axiomensystem für Wahrscheinlichkeitsräume zu geben, wurde erst von **Kolmogoroff** (1933) verwirklicht.
Er gab Anfang dieses Jahrhunderts die noch heute übliche theoretische Grundlage für die mathematische Beschäftigung mit dem Zufall.

Bekannt für die "Mathematik der Glücksspiele" waren im 18. Jahrhundert auch die Namen Lacroix, de Montmort und de Moivre. Sie waren Mathematiker, die bestimmte Probleme formulierten und auch lösten. Aber ebenso bekannt wurde ein gewisser **Chevalier de Méré** (1607-84), ein Laie, der sich mit **drei berühmt gewordenen Problemen** an Blaise Pascal wandte, worüber Pascal in einem Brief an Fermat 1654 berichtete.

Den Bezug zur realen Welt in Bezug auf Wahrscheinlichkeitsberechnungen versuchen wir nunmehr ausführlich in **Kapitel 2** herzustellen, in dem wir die gängigsten Glücksspiele beschreiben, Würfeln, Lotto, TOTO und Roulette zum Beispiel, und unter Annahmen über die

Gleichwahrscheinlichkeit bestimmter "Ergebnisse" die Wahrscheinlichkeit anderer Ereignisse berechnen, und die meisten im täglichen Leben (in der Schule) auftretenden stochastischen Fragen behandeln.

Die hier benutzte Methode wird stets dieselbe sein:
Gemacht wird die Annahme, dass bestimmte Ergebnisse (eines Versuchs, Glückspiels) gleichwahrscheinlich ("gleichverteilt") sind, dass wir also die "sämtlichen Möglichkeiten" für den Ausgang des Versuchs kennen, als gleichwahrscheinlich ansehen und abzählen können.
Dann benutzen wir zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit p(A) eines bestimmten Ereignisses A die sogenannte **LAPLACE-FORMEL** (Urformel)

$$\mathbf{p(A)} = \frac{\textbf{[Anzahl der für A günstigen Möglichkeiten]}}{\textbf{[Anzahl aller Möglichkeiten]}}$$

Wie aus dieser Beschreibung ersichtlich ist, wird unsere Hauptbeschäftigung sein, Anzahlen bestimmter Möglichkeiten zu bestimmen. Schon der berühmte Sir Francis **Galton** (1822-1911, Begründer eines "Statistischen" Forschungsinstituts, noch heute Teil des University College London, ab 1911 war übrigens **Pearson** Direktor an diesem Institut, bekannt z.B. durch das "Galtonsche Brett") sagte: "Wann immer du kannst, zähle!".
Dieses Zählen von Möglichkeiten (Bestimmen der Mächtigkeit bestimmter endlicher Mengen) ist Gegenstand der Kombinatorik. Die "Möglichkeiten" in den verschiedensten Situationen müssen jeweils mit den "richtigen" mathematischen Objekten identifiziert werden, damit eine systematische (rekursive, explizite oder formelmäßige) Abzählung erfolgen kann.
Diese **Kombinatorischen (Grund-)Aufgaben** werden wir jetzt erst einmal anhand der wichtigsten Beispiele zur Kenntnis nehmen, einigermaßen salopp behandeln und auch lösen.

In **Kapitel 1 (Kombinatorik)** wurden die Begriffe bzw. Sätze präzise definiert bzw. streng bewiesen.

**Zusammenfassung:**

(i) Bei gewissen Abzählproblemen lassen sich die „Möglichkeiten“ , die es zu zählen gilt, als Paare (2-Tupel), Tripel (3-Tupel) oder allgemein als k-Tupel mit Komponenten aus der Menge {1, 2, ..., n} identifizieren (vielleicht auch nur diejenigen mit einer bestimmten Nebenbedingung). Daher ist es wichtig, diese **Tupel** zählen zu können.
Wenn die **Komponenten „unabhängig“** sind, hat man die einfache **Multiplikationsformel**.

(ii) Bei gewissen anderen Abzählproblemen lassen sich die „Möglichkeiten“, die es zu zählen gilt, mit den **k-Teilmengen aus der Menge {1, 2, ..., n}** identifizieren (vielleicht auch nur diejenigen mit einer Nebenbedingung). Daher ist es wichtig, diese Teilmengen zählen zu können. Wenn es sich um die sämtlichen k-Teilmengen handelt, ist die Anzahl gleich $\binom{n}{k}$, dem entsprechenden **Binomialkoeffizienten**, und für ihn hat man z.B. die explizite Formel.

**Faustregel:** Tupel zählen ist leicht, Mengen zählen ist schwer.

Jetzt könnten wir schon Wahrscheinlichkeiten bei den bekanntesten Zufallsexperimenten wie dem "Ziehen von Kugeln aus einer Urne" berechnen.

Aber nicht so schnell: erst mal zum Begriff "Wahrscheinlichkeit". Diskutieren wir die bekanntesten Beispiele, und versuchen, ein Gefühl für den Begriff zu bekommen.

## (2.1) Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Es geht um Aussagen eines bestimmten Typs.
Jeweils betrachten wir ein bestimmtes **Ereignis** A, das in einer bestimmten Situation, bei einem bestimmten **Experiment,** eintreten kann oder auch nicht. Und überlegen, wie wahrscheinlich es ist, daß A eintritt.
Zum Beispiel im Lotto zu spielen, wäre ein interessantes Experiment. Dabei könnte es sich ereignen, dass ich einen "Sechser" habe und Millionär werde. Dazu müßten meine angekreuzten Zahlen bei der Ziehung im Fernsehen auch gezogen werden.
Wie kann ich das Ereignis A (6 Richtige) nun formulieren?
- Ich sehe die Gewinnzahlen im Fernsehen und frage mich, ob ich diese sechs Zahlen angekreuzt habe. In diesem Fall ist das Zufallsexperiment (mein Ausfüllen) schon durchgeführt worden. Und dann formulieren wir unsere Aussage in der Vergangenheitsform.
A : = "Ich habe die richtigen Zahlen angekreuzt."
- Ich schaue mir die Ziehung im Fernsehen an und frage mich, welche sechs Zahlen gezogen werden. In diesem Fall wird das Zufallsexperiment (die Ziehung) gerade durchgeführt. Und dann formulieren wir unsere Aussage in der Gegenwart.
A : = "Sie ziehen meine Gewinnzahlen."
- Ich fülle meinen Tippzettel aus und frage mich, welche sechs Zahlen wohl am Samstag gezogen werden. In diesem Fall wird das Zufallsexperiment (die Ziehung) erst später durchgeführt. Und dann formulieren wir unsere Aussage in der Zukunftsform.
A : = "Es werden am Samstag meine Zahlen gezogen werden."

**Auf die zeitliche Formulierung kommt es nicht an.** Das Eintreten eines Ereignisses kann in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft betrachtet und formuliert werden.

Diskutieren wir Äußerungen über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei bestimmten "Zufalls-Experimenten". Denken wir uns als Ereignis A zum Beispiel
A = "es regnet"  bei einer bestimmten Wetterlage
A = "Zusatzzahl 23" bei einer Lottoziehung
A = "alle haben bestanden" bei einer bestimmten Klausur.

Dann sind Aussagen möglich wie:
"Hundertprozentig tritt A ein."
"Sicher tritt A ein."
"Höchstwahrscheinlich tritt A ein."
"Möglicherweise tritt A ein."
"Die Chancen für A stehen 50 zu 50."
"Es ist vollkommen offen, ob A eintritt."
"Es ist eher unwahrscheinlich, dass A eintritt."
"Es ist sehr unwahrscheinlich, dass A eintritt."
"Es ist ausgeschlossen, dass A eintritt."
"Null Chance, dass A eintritt."
Wie wir sehen, werden die Chancen für A in unserer Liste immer schlechter; sie sinken von 100% auf 0% ab. Und das bedeutet, dass wir immer weniger glauben, dass A eintritt. Wenn wir auf A oder nicht A wetten (raten, setzen) müßten, würden wir oben auf "A", unten auf "nicht A" setzen, in der Mitte unsicher sein.
Die Chancen-Angabe in Prozent sieht nach einer zahlenmäßigen Beschreibung unseres Gefühls, unseres Vertrauens in A aus. Und genau **das Maß an Vertrauen, das man in das Eintreten von A hat, nennt man "Wahrscheinlichkeit" von A**, in Symbolen p(A). Weil Wahrscheinlichkeit lateinisch "probabilitas" heißt, nennen wir es übrigens p(A) und nicht w(A).
Und p(A) ist daher eine Zahl zwischen 0 und 1 (eine Prozentzahl zwischen 0% und 100%), die beschreibt, wie wahrscheinlich das Eintreten von A ist. Meist ist das "p" ein kleines p, manchmal aber auch ein großes (wenn es zu Verwechslungen kommen könnte).

**Die Wahrscheinlichkeit p(A) eines Ereignisses A ist der Grad (das Maß) an Vertrauen, das man in das Eintreten von A hat.**

Sie wird durch eine Zahl zwischen 0 und 1 oder durch eine Prozentzahl (Anteil an der vollkommenen Sicherheit) wiedergegeben.
Sie ist eventuell von Mensch zu Mensch beim selben Ereignis verschieden, also **subjektiv**.

Ich hoffe, dass Sie "glauben", dass es so etwas wie "die Wahrscheinlichkeit von A" gibt. Zumindest wenn die Situation, das Zufallsexperiment, genau genug beschrieben ist. Und zumindest "für Sie persönlich".
Dass manche Ereignisse sehr wahrscheinlich (p(A) nahe 1), manche sehr unwahrscheinlich sind (p(A) nahe 0). Es kommt darauf an, diese Wahrscheinlichkeit zahlenmäßig in den Griff zu bekommen, vielleicht sogar auszurechnen.
Das geht aber mit so etwas "Schwammigem" wie "Maß an Vertrauen" nicht gut.
Dazu müsse wir aber versuchen, den Begriff noch genauer zu fassen, zu definieren, bzw. ihn und seine Eigenschaften objektiv, "axiomatisch" festzulegen.

Wo haben wir aber unser Vertrauen in das Eintreten von A her?  Aus der Erfahrung.
Wenn wir ein Experiment schon oft durchgeführt haben, und A ist sehr selten eingetreten, ist A für uns sehr unwahrscheinlich. Ist A hingegen sehr oft eingetreten, so betrachten wir A als sehr wahrscheinlich. Bei einem nur sporadischen Auftreten von A würden wir A eine kleine bis mittlere Wahrscheinlichkeit zumessen. Offenbar sehen wir als Grund für häufiges bzw. seltenes Eintreten von A seine große bzw. kleine Wahrscheinlichkeit an. An der Häufigkeit des Eintretens von A können wir "ablesen", wie wahrscheinlich A ist.
Natürlich ist die **absolute Häufigkeit** (des Eintretens) von A, das heißt die Anzahl, wie oft A eingetreten ist, **völlig irrelevant**, solange nicht gesagt wird, wie oft man das Experiment insgesamt durchgeführt hat.
Bei nur einer Durchführung des Experiments wird auch das sicherste Ereignis nicht häufiger als einmal eintreten können, während bei einer Milliarde Durchführungen des Experiments auch ein eher unwahrscheinliches Ereignis durchaus ein paarmal eintreten wird. Die Häufigkeit des "Eintreffens" von A muß sinnvollerweise auf die Anzahl der Durchführungen des Experimentes bezogen werden. Dann erhält man die relative Häufigkeit des "Eintreffens" von A.
Und wir sind uns offenbar einig:

Die **relative Häufigkeit des Eintretens von A** in einer (längeren) Versuchsreihe ist ein **Maß für seine Wahrscheinlichkeit**.

Erstaunlicherweise liefern die relativen Häufigkeiten des Ereignisses A bei hinreichend langen Versuchsreihen tatsächlich approximativ (asymptotisch) eine bestimmte (und immer wieder dieselbe) Zahl zwischen 0 und 1, die man als p(A) hernehmen könnte. Das könnte man die **statistische Wahrscheinlichkeit** von A nennen.

Trotzdem ist dieses "experimentelle Festlegen" von p(A) noch nicht das Gelbe vom Ei.
Wenn man p(A) wissen will, muß man lange Versuchsreihen durchführen, das ist schon umständlich. Und zwei Leute, die beide dieselbe Wahrscheinlichkeit p(A) herausbekommen wollen, erhalten vielleicht (geringfügig) unterschiedliche Werte. Wieder ist p(A) nicht ein für alle Mal und unbestritten festzulegen. Das ist auch der Grund dafür, daß sich eine auf relativen Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen aufbauenden Definition für Wahrscheinlichkeit (wie etwa von v. Mises vorgeschlagen) nicht gehalten hat. Es gilt jedoch das "Gesetz" (es gibt die allgemeine Überzeugung), daß sich die relativen Häufigkeit eines Ereignisses A bei oftmaligem Wiederholen desselben Experiments der Wahrscheinlichkeit p(A) nähert.

Geht es nicht irgendwie **objektiv**er?
Doch. Die sogenannte **klassische Wahrscheinlichkeit**.

In manchen **Zufallsexperimenten** kann man Symmetriebetrachtungen anstellen, und sich überlegen, dass gewisse **Ausgänge**, also **Ergebnisse** des Experiments, "**Möglichkeiten**", "**Fälle**", gleichwahrscheinlich sind, daß wir keinen unter ihnen als wahrscheinlicher als die anderen ansehen können.  Diese Ergebnisse haben dann offenbar die gleiche Wahrscheinlichkeit. Wenn wir einem Ereignis A nun ansehen, daß es bei manchen dieser Ausgänge eintritt (dass diese "günstig" für A sind), dann wird A immer wahrscheinlicher, je mehr Versuchsausgänge günstig für A sind ( d.h. je "öfter" A eintritt), bzw. je wahrscheinlicher A ist, bei desto mehr Ausgängen wird A auch eintreten.

Ungünstig für A nennen wir einen Versuchsausgang $\omega$, wenn beim Versuchsausgang $\omega$ das Ereignis A nicht eingetreten ist.

**Der Anteil der für A günstigen Versuchsausgänge (an den sämtlichen möglichen Versuchsausgängen) ist** also **ein Maß für die Wahrscheinlichkeit von A**.

Testen wir das an einem leichten Beispiel: einmal würfeln mit einem gewöhnlichen Würfel.
Niemand wird bestreiten, daß die Ergebnisse (Versuchsausgänge) "1", "2", ..., "6" gleichwahrscheinlich sind.
Jetzt können wir aber auch sagen, dass "1" ein Ereignis ist, dessen Wahrscheinlichkeit man wissen möchte.
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit für "1"?
Die Antwort ist natürlich p("1") = 1/6.
Und der Anteil der für das Ereignis "1" günstigen Versuchsausgänge (1) an der Anzahl aller Versuchsausgänge (6) ist tatsächlich 1/6.

Wir wollen die Antwort aber noch mehr motivieren.

Bei unserem "Sechser-Würfel" haben wir eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für "1", die wir $w_6(1)$ nennen. Sie ist nicht besonders klein, aber auch nicht groß.
Bei einem Würfel mit nur einer Seite (wenn etwa auf allen Seiten die Zahl 1 steht) wären wir ganz sicher gewesen, daß "1" eintritt, d.h. es wäre $w_1(1) = 1$.
Bei einem Würfel mit 2 Seiten, etwa einer Münze, hätten wir sicher eine 50%-ige Chance, eine "1" zu würfeln - d.h. $w_2(1) = 1/2$.
Und bei Würfeln mit mehr als 6 Seiten (Dodekaedern oder Ikosaedern, also 12 oder 20) wäre die Wahrscheinlichkeit offenbar indirekt proportional zur Seitenanzahl abgefallen.
Wir können vermuten, daß bei gleichwahrscheinlichen Versuchsausgängen die **Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Versuchsausgang indirekt proportional zu ihrer Anzahl** ist. Und diese indirekte Proportionalität legt nahe, daß $w_n(1) = 1/n$ gilt.
Also erhalten wir für unseren Würfel wie oben p("1") = 1/6.
Das hat jetzt die Wahrscheinlichkeit der einzelnen (**gleichwahrscheinlichen**) Versuchsausgänge betroffen. **Bei genau n Möglichkeiten hat jede die Wahrscheinlichkeit 1/n.**

Sei p("1") = p("2") = ... = p("6") = x (alle gleichwahrscheinlich, das sei angenommen).
Wenn ich das Ziel habe, eine 1 zu würfeln, habe ich also die Chance x, zu gewinnen.
Wie ist das, wenn ich (bei entsprechenden Spielregeln) bei "1" und auch bei "2" gewinne?
Habe ich dann nicht die doppelte Chance zu gewinnen? Oder wenn eine gerade Zahl zum Gewinnen ausreicht: dann doch sicher die dreifache Chance! Offenbar erhöhen sich meine Chancen in dem Maße, wie die Anzahl der Versuchsausgänge, bei denen ich gewonnen habe, die also günstig für mich sind.
Es liegt nahe, die **Chancen für** einen "Gewinn" (**das Eintreten eines bestimmten Ereignisses**) als Summe der Wahrscheinlichkeit der für das Ereignis **günstigen Versuchsausgänge** anzusehen.
Daß irgendeine der Zahlen 1 bis 6 eintritt, ist sicher, hat also Wahrscheinlichkeit 1.
Also gilt
p("1" oder "2" oder "3" oder "4" oder "5" oder "6") = x + x + x + x + x + x = 6x = 1.
Daher ergibt sich p("1") = x = 1/6.

Es ist – wie eben schon suggeriert - naheliegend, daß die **Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft hat**, die man **"Additivität"** nennen könnte:
Wenn man Ergebnisse (oder sogar Ereignisse) A und B beide als "Gewinn" ansieht, so ist

p(Gewinn) = **p(A oder B) = p(A) + p(B).**

Dies gilt zwar nicht für alle Paare A, B von Ereignissen, man muss da noch vorsichtig sein, aber doch oft (genaueres weiter unten!).

Wie wahrscheinlich ist nun ein Ereignis A, für das q der N Versuchsausgänge günstig sind?

Wir haben zwei Formeln zur Auswahl!

**Anteil der günstigen Versuchsausgänge**: p(A) = q/N. (klassisch)

**Summe der Wahrscheinlichkeiten der für A günstigen Versuchsausgänge** (jeder sei gleichwahrscheinlich, habe also Wahrscheinlichkeit 1/N): dann ergibt sich
p(A) = 1/N + 1/N + ... + 1/N = q( 1/N ) = q/N.

Wir erhalten also **das gleiche Resultat**.

Formelmäßig:

$$\boxed{\mathbf{p(A)} = \frac{\textbf{[Anzahl der für A günstigen Möglichkeiten]}}{\textbf{[Anzahl aller Möglichkeiten]}}}$$

Dabei muss nur sichergestellt sein, dass die benutzten "Möglichkeiten" genau solche gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten sind, wie wir sie diskutiert haben. Und dass die Wahrscheinlichkeit für sie additiv ist.
Diese Urfomel, oder auch **Laplace-Formel**, werden wir meist benutzen. Und sie wird auch fast immer in der Schule benutzt.

Wenden wir die Formel bei einigen Beispielen an.

Bleiben wir beim Würfeln. Betrachten wir die Ereignisse
A = "gerade Zahl", B = "Primzahl", sowie C = "A oder B tritt ein", D = "A und B treten ein".
Offenbar sind die Hälfte der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6, nämlich 2, 4 und 6, gerade, also ist die Hälfte der Versuchsausgänge günstig für A, und wir haben p(A) = 1/2.
Offenbar sind auch die Hälfte der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6, nämlich 2, 3 und 5, Primzahlen, also ist die Hälfte der Versuchsausgänge günstig für B, und wir haben p(B) = 1/2.
Der Fall "A oder B", daß man also bei einer geraden Zahl, aber auch bei einer Primzahl "gewonnen" hat, hat bereits sehr große Wahrscheinlichkeit. Er tritt bei den Ergebnissen 2, 3, 4, 5, und 6 ein, also in 5 von 6 Fällen: p(C) = 5/6.

$$\{2,3,4,5,6\} = \{2,4,6\} \cup \{2,3,5\}$$

Anders bei "A und B": hier ist nur der Fall "2" ein "Gewinn": p(D) = 1/6.

$$\{2\} = \{2,4,6\} \cap \{2,3,5\}.$$

Das Ereignis D ist zwar eher unwahrscheinlich, aber nicht unmöglich: die Ereignisse A und B können gleichzeitig auftreten, sie schließen sich nicht gegenseitig aus. Sie sind nicht **unvereinbar**, sondern sie haben einen gemeinsamen günstigen Versuchsausgang, einen, der für A und B günstig ist. Offenbar handelt es sich um den Schnitt der für A und der für B günstigen Versuchsausgänge.

| | |
|---|---|
| p(A) = | ½ |
| p(B) = | ½ |
| p(C) = p(A oder B) = | 5/6 |
| p(D) = p(A und B) = | 1/6 |

Wie wir sehen, **gilt hier n i c h t p(A oder B) = p(A) + p(B)**.
Im Gegensatz zu p("2" oder "3") = p("2") + p("3"), einer Situation, wo sich die Ereignisse "2" und "3" gegenseitig ausschlossen.

Die Ereignisse A und B als "alle Versuchsausgänge" (als "alle Möglichkeiten") hernehmen zu wollen, hätte falsche Ergebnisse gebracht. Sie haben meherere "Fehler":

(1) **es gibt mögliche Ergebnisse (Versuchsausgänge) des Experimentes, für die weder A noch B günstig gewesen wären,** wie etwa das Ergebnis "1". Dem hätten wir die Wahrscheinlichkeit 0 geben müssen, weil ja weder A noch B günstig dafür sind, obwohl "1" ein mögliches Ergebnis ist.
(2) **es gilt nicht die Additivität, da sie sich gegenseitig nicht ausschließen**.

Also können wir n i c h t A und B als "alle Möglichkeiten" in der Laplace-Formel gebrauchen.

**Wann können wir die Laplace-Formel für die Berechnung von p(A) einsetzen?**

(a) wenn wir eine endliche Anzahl von Versuchsausgängen (Ergebnissen, Möglichkeiten, Elementarereignissen) angeben können, die
- sämtlich gleichwahrscheinlich sind, und
- sich gegenseitig ausschließen, und
- alles abdecken, so daß

(b) sich A über diese Versuchsausgänge beschreiben läßt, d.h. daß diese jeweils entweder günstig oder ungünstig für A sind.

Hierbei ist (a) klar: die Anzahl soll ja in die Formel eingehen; da muß es eine (endliche) Zahl sein. Die anderen Kriterien bedeuten:
Bei jeder möglichen, denkbaren Durchführung des Experimentes können niemals zwei dieser Versuchsausgänge gleichzeitig auftreten, zu jeder möglichen, denkbaren Durchführung des Experimentes gibt es also höchstens einen dieser Versuchsausgänge.

Und: bei jeder möglichen, denkbaren Durchführung des Experimentes muß einer dieser Versuchsausgänge auftreten, zu jeder möglichen, denkbaren Durchführung des Experimentes gibt es also mindestens einen dieser Versuchsausgänge.
Gemeinsam bedeutet also, daß **zu jeder möglichen, denkbaren Durchführung des Experimentes genau einer dieser Versuchsausgänge gehört.**
Und das ist sicher genau das, was wir uns unter den sämtlichen Möglichkeiten, unter den sämtlichen Ergebnissen des Experimentes vorstellen.
**Und die Liste der Ergebnisse des Experiments muss natürlich etwas mit dem Ereignis zu tun haben, für das wir uns interessieren.**

**Weitere "Gegenbeispiele":**
Bleiben wir beim Würfeln. Betrachten wir die Ereignisse
A = "gerade Zahl", B = "Primzahl", sowie E = {1}, F = {ungerade Primzahl}.
(i) Dann decken die Ereignisse A, B und E alles ab, schließen sich aber gegenseitig nicht aus.
(ii) Die Ereignisse A, F und E decken alles ab, schließen sich gegenseitig auch aus, sind aber nicht gleichwahrscheinlich! $p(A) = ½$, $p(F) = 1/3$, $p(E) = 1/6$.

Übrigens: Die Ergebnisse "1" bis "6" beim Experiment "einmal würfeln" erfüllen die Bedingungen (a) bis (d), sind also prinzipiell ok zum Rechnen (und werden praktisch immer verwendet) - passen aber trotzdem nicht bei allen Ereignissen A. Zum Beispiel weiß man dabei nicht, ob der Würfel vom Tisch gefallen ist oder nicht. Das Ereignis A = "Würfel fällt vom Tisch" läßt sich durch diese Ergebnisse nicht beschreiben.

Für dieses Ereignis müßte man andere Versuchsausgänge hernehmen, deren Wahrscheinlichkeiten man eventuell als Erfahrungswerte (relative Häufigkeiten) kennt. Wenn man z.B. durchschnittlich alle zehn Würfe einmal auf dem Boden herumkriechen muß, um den heruntergefallenen Würfel aufzuheben, wird man $p(A) = 1/10$ ansetzen. Dann könnte man das Ereignis B = "Würfel auf dem Tisch" dazunehmen, und (da man ja durchschnittlich in 9 von 10 Fällen nicht kriechen mußte) $p(B) = 9/10$ setzen.
Nun wären A und B tatsächlich sich gegenseitig ausschließende Versuchsausgänge, die "alles abdecken": bei jeder Durchführung des Experimentes muß genau einer der beiden Fälle eintreten. Und man hat auch die Additivität der Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{1 = p(A \text{ oder } B) = p(A) + p(B) = 1/10 + 9/10}$$

Übrigens ist B das "Gegenereignis" zu A: es tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt! Das heißt: die für B günstigen Ergebnisse sind genau die für A ungünstigen. Und wir haben gelernt:

Sind A und B Gegenereignisse zueinander, das heißt tritt A genau dann ein, wenn B nicht eintritt, so gilt $p(A) = 1 - p(B)$.

Langsam können wir anfangen zusammenzufassen, was wir für Aussagen über Wahrscheinlichkeiten bereits als einleuchtend bzw. richtig akzeptieren.
Wir denken uns ein Experiment und eine Menge von für die Laplace-Formel geeigneten Versuchsausgängen dazu.

Ein **unmögliches Ereignis** ist ein Ereignis A, das niemals eintritt, bei keinem einzigen Versuchsausgang. Das heißt: kein einziger Versuchsausgang ist günstig für A, alle sind ungünstig. Also **p(A) = 0**.
Ein **sicheres Ereignis** ist ein Ereignis A, das stets eintritt, bei jedem Versuchsausgang. Das heißt: jeder Versuchsausgang ist günstig für A.
Also **p(A) = 1**.
**Alle "anderen" Ereignisse haben Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1**.
**Schließen sich zwei Ereignisse A und B gegenseitig aus**, so gibt es keine für beide günstige Versuchsausgänge. Das heißt: die für A oder B günstigen Versuchsausgänge setzen sich als disjunkte Vereinigung zusammen aus denen, die für A günstig sind, und denen, die für B günstig sind. Es gilt **p(A oder B) = p(A) + p(B)**.
Insbesondere gilt **p(nicht A) = 1 - p(A)**.

Für die Beweise dieser (wenn man die Laplace-Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten verwendet) Tatsachen nennt man die Menge aller Versuchsausgänge $\Omega$, die Menge der für A günstigen Versuchsausgänge $\Omega_1$, und die Menge der für B günstigen Versuchsausgänge $\Omega_2$. Dann ist $\emptyset$ die Menge der für ein unmögliches Ereignis günstigen, $\Omega$ die Menge der für ein sicheres Ereignis günstigen, $\Omega_1 \cup \Omega_2$ die Menge der für das Ereignis "A oder B" günstigen und $\Omega$ - $\Omega_1$ die Menge der für das Gegenereignis zu A günstigen (= der für A ungünstigen) Versuchsausgänge, und man kann alles nachrechnen.

## (2.2) Das Urnenmodell: Ziehungen "k aus n"

Offenbar besteht bei vorgegeben Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung das Hauptproblem darin, zu wissen, welches (und wie viele!!) die gleichwahrscheinlichen Ergebnisse des Experiments sind, die man für die Laplace-Formel hernehmen soll.
Das nächste Problem ist dann, die für das Ereignis A günstigen dieser Ergebnisse abzuzählen.

Eine übliche Vorgehensweise ist die, das Experiment mit einem bekannten Modell zu identifizieren, das gefragte Ereignis mit dem entsprechenden Ereignis in diesem Modell zu identifizieren - und alle Rechnungen in dem Modell auszuführen.

Beschreiben wir das Standard-Zufallsexperiment (das "Urnenmodell") in seinen vier Varianten, bei dem man genau weiß, wie die "sämtlichen Möglichkeiten" aussehen.

In einer Urne (oder einer Schüssel, traditionell sagt man allerdings immer Urne) befinden sich n Kugeln. Sie tragen, damit man sie unterscheiden kann, die Nummern 1 bis n.
Nun zieht jemand k mal nacheinander eine Kugel aus der Urne und schreibt sich die Nummer auf. Die gezogenen Zahlen sind das Ergebnis der Ziehung.

Die Frage ist nun: **wie viele Möglichkeiten (Ergebnisse der Ziehung) gibt es?**

Und wie gesagt, es gibt vier Varianten.
Man kann bei der Durchführung die gezogene Kugel jeweils wieder in die Urne zurücklegen oder auch nicht. Das macht einen großen Unterschied, denn im einen Fall ist es möglich, daß manche Zahlen bei einem Ergebnis mehrfach vorkommen können, im anderen Fall nicht.
Und zum zweiten ist denkbar, daß man sich für die Reihenfolge der gezogenen Zahlen interessiert oder nicht.

Es gibt also die **Varianten einer Ziehung "k aus n"**:

(I) mit Reihenfolge, mit Zurücklegen
(II) mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen
(III) ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen
(IV) ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen.

Beschreiben wir die Ergebnisse (Möglichkeiten) in jedem der vier Fälle und berechnen ihre Anzahl. Wir nennen auch jedesmal die (etwas altertümlichen und in der Literatur nicht ganz einheitlichen) Namen der Möglichkeiten: es handelt sich um **Variationen**, **Permutationen** und **Kombinationen**. Man könnte jeweils noch dazu angeben "welcher Stufe oder auch Klasse" (in unserem Fall k) und aus "welcher Grundgesamtheit" (in unserem Fall n) sie stammen. Außerdem muß gesagt werden "ohne Wiederholungen" oder "mit Wiederholungen". Es ist ein ziemliches Durcheinander mit den vielen Bezeichnungen. Aber das nehmen wir nicht so genau.
Wir werden lieber unsere (mathematischen) Begriffe
- k-Tupel
- k-elementige Menge

für mit Reihenfolge oder ohne Reihenfolge angegebene k Elemente benutzen. Und durch ein
- von paarweise verschiedenen
- von nicht notwendig verschiedenen

Elementen aus $\{1,2,...,n\}$ sagen, ob Wiederholungen zugelassen sind oder nicht.

**k-Variationen sind k-Tupel, es kommt auf die Reihenfolge an;**
- mit Wiederholungen kann man bei einer Grundgesamtheit von n Objekten k-Variationen zu beliebig großem k bilden
- ohne Wiederholungen gibt es zu $k > n$ keine k-Variationen

**Permutationen sind n-Variationen ohne Wiederholungen**

**k-Kombinationen sind k-Mengen, es kommt auf die Reihenfolge nicht an**.
- ohne Wiederholungen sind es die gewöhnlichen k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Grundmenge, die gibt es nur für $0 \leq k \leq n$,
- mit Wiederholungen sind es "Mengen" von k Elementen der n-elementigen Grundmenge, die aber nicht alle verschieden zu sein brauchen. Die gibt es auch für $k > n$.

Abzuzählen, wie viele Ergebnisse es in den vier Varianten jeweils gibt, ist eine Sache. Gleich werden wir die vier Formeln sehen – die Formeln für die vier "kombinatorischen Grundaufgaben". Die merkt man sich. OK.

Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

| Ergebnisanzahlen bei einer Ziehung "k aus n" | | ohne Zurücklegen | mit Zurücklegen |
|---|---|---|---|
| | | | |
| mit Reihenfolge | | $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ | $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ |
| ohne Reihenfolge | | $\binom{n}{k}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |

Aber man muss noch etwas dazu merken, wenn man das Urnenmodell zu Wahrscheinlichkeitsberechnungen benutzen will:
man muss auch wissen, "welche Ergebnisse brauchbar sind", also in der LAPLACE-Formel benutzt werden dürfen, und welche nicht. Das habe ich durch die Farbe, in der die Formeln gedruckt sind, angedeutet.

Grundvoraussetzung ist, daß die Ziehung zufällig geschieht, das heißt, daß stets (bei jedem Hineingreifen) jede in der Urne vorhandene Kugel dieselbe Chance hat, gezogen zu werden, z.B. indem jedesmal intensiv gemischt wird, und der Ziehende blind ist (oder zumindest nicht hinschaut, welche Kugel er nimmt). Und diese Voraussetzung muss übrigens auch in der Situation erfüllt sein, die man mit der Ziehung aus der Urne "modellieren" will – also jeder einzelne "Zug" muss rein zufällig sein, und jede gerade vorliegende "Kugel" muss dieselbe Chance haben.
Und dann sind die Ergebnisse in drei der vier Varianten "blau", in einer "rot".

Ein Grund dafür, dass die Variationen stets gleichwahrscheinlich sind, wird später angegeben: man fasst das k-fache Ziehen als "Mehrfach-Experiment" auf – und da gelten für die Wahrscheinlichkeiten Produktformeln, so dass man mit dieser Sichtweise ausrechnen kann, dass die Variationen dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, also gleichwahrscheinlich sind.

Wir können uns aber auch auf den Standpunkt stellen, dass es keinen sichtbaren Grund dafür gäbe, dass irgendeine der Variationen wahrscheinlicher sein sollte als eine andere. Wir sagen also einfach: offenbar sind sie gleichwahrscheinlich.

Auf dieser Basis haben wir unsere LAPLACE-Formel zur Verfügung und können die Wahrscheinlichkeiten der Kombinationen in den beiden Fällen ausrechnen. Dann ergibt sich, dass die k-Kombinationen ohne Wiederholungen gleichwahrscheinlich (also blau) sind, während für $k > 1$ die k-Kombinationen mit Wiederholungen nicht gleichwahrscheinlich (also rot) sind.

**(I) mit Reihenfolge, mit Zurücklegen**

Hier soll man beim Aufschreiben der k gezogenen Zahlen die Reihenfolge beachten, in der sie gezogen wurden. Am einfachsten macht man das, indem man k-Tupel schreibt: in die i-te Komponente des Tupels schreiben wir die i-te gezogene Zahl. Dann erhält man also als Möglichkeiten die sämtlichen k-Tupel von Zahlen aus {1,2,...,n}. Natürlich sind Wiederholungen erlaubt, weil ja zurückgelegt wird.
Diese Möglichkeiten nennt man wie gesagt **Variationen mit Wiederholungen**. Und es gibt davon genau **$n^k$ Stück**.
**Diese Variationen sind sämtlich gleichwahrscheinlich**, man kann sie für die Laplace-Formel hernehmen.

**(II) mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

Wieder soll man beim Aufschreiben der k gezogenen Zahlen die Reihenfolge beachten, in der sie gezogen wurden. Am einfachsten macht man das, indem man k-Tupel schreibt: in die i-te Komponente des Tupels schreiben wir die i-te gezogene Zahl. Dann erhält man also als Möglichkeiten k-Tupel von Zahlen aus {1,2,...,n}. Es sind aber nicht alle solche k-Tupel erlaubt, nämlich es sind keine Wiederholungen erlaubt, weil ja nicht zurückgelegt wird.
Diese Möglichkeiten nennt man **Variationen ohne Wiederholungen**.
Und es gibt davon genau **$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$** Stück.
**Diese Variationen sind ebenfalls sämtlich gleichwahrscheinlich**, man kann sie für die Laplace-Formel hernehmen.

Ein **Spezialfall** muß an dieser Stelle erwähnt werden: der Fall **n = k**.
Das heißt: man zieht die Urne ganz leer und hat **die sämtlichen Zahlen** am Ende der Ziehung **in eine bestimmte Reihenfolge** gebracht. Diese Ergebnisse (Möglichkeiten für eine Reihenfolge der n Zahlen) werden also durch n-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,n} beschrieben, d.h. durch n-Tupel, wo jede Zahl aus {1,...,n} genau einmal auftaucht. Diese Variationen werden dann **Permutationen** genannt, ihre Anzahl $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ wird mit n! (sprich **n Fakultät**) bezeichnet.
Mit Hilfe der Fakultäten läßt sich die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen übrigens kurz und bündig schreiben: **$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = (n!)/(n-k)!$.**

**(III) ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

Nun soll man beim Aufschreiben der k gezogenen Zahlen die Reihenfolge vernachlässigen, in der sie gezogen wurden. Am einfachsten macht man das, indem man Mengen von k Zahlen hinschreibt. Es wird niemals eine Zahl doppelt hingeschrieben, weil ja nicht zurückgelegt wird.
Daher erhält man also als Möglichkeiten genau die sämtlichen k-Teilmengen aus {1,2,...,n}.
Diese Möglichkeiten nennt man **Kombinationen ohne Wiederholungen**.
Und es gibt davon genau $\binom{n}{k}$ Stück. Es gilt $\binom{n}{k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}$.
Unter Verwendung von Fakultäten sieht die (explizite) Formel so aus:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

**Satz:** Diese Kombinationen (ohne Wiederholungen) sind alle gleichwahrscheinlich, sie haben alle die Wahrscheinlichkeit $1/\binom{n}{k} = \dfrac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$.

*Beweis.* Bestimmt sind die Kugeln in irgendeiner Reihenfolge gezogen worden, man hat sch bloß nicht für sie interessiert. Wir können also die Ziehung auch als Ziehung mit Reihenfolge und ohne Zurücklegen betrachten. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit irgendeiner solchen Kombination nun mittels der Laplace-Formel. Im Nenner steht die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen, also $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)$. Im Zähler steht die Anzahl der Variationen, die diese Kombination liefern, also günstig für das Auftreten dieser Kombination sind. Offenbar sind das $k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 2\cdot 1$ Stück, und die Formel ist gezeigt.

**(IV) ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen**

Wieder soll man beim Aufschreiben der gezogenen Zahlen die Reihenfolge vernachlässigen, in der sie gezogen wurden. Am einfachsten macht man das, indem man Mengen von k Zahlen schreibt. Es werden diesmal aber Zahlen auch (wenn sie mehrfach gezogen werden) wiederholt hingeschrieben. Weil zurückgelegt wird, kommt das vor.
Daher erhält man also als Möglichkeiten genau die sämtlichen Mengen von k nicht notwendig verschiedenen Elementen aus $\{1,2,\ldots,n\}$. Diese Möglichkeiten nennt man **Kombinationen mit Wiederholungen**.
Und es gibt davon genau $\binom{n+k-1}{k}$ Stück. Sie sind nicht gleichwahrscheinlich.

**Beispiel:** Zweimal ziehen, in der Urne seien zwei Kugeln. ("2 aus 2")

Dann hat man (mit Reihenfolge): $p(\,(1,1)\,) = p(\,(1,2)\,) = p(\,(2,1)\,) = p(\,(2,2)\,) = \frac{1}{4}$.
Also: $p(\,\{1,1\}\,) = p(\,\{2,2\}\,) = \frac{1}{4}$. Aber: $p(\,\{1,2\}\,) = \frac{1}{2}$.
Dieses Modell passt übrigens in den folgenden Fällen:
- zweimaliger Münzwurf
- zweimal würfeln, nur gerade/ungerade interessiert
- zwei Mäntel werden an zwei Haken gehängt (auch beide am selben Haken erlaubt).

Versuchen wir, einige Beispiele als solche Ziehungen aufzufassen, und die erhaltenen Ergebnisse mit diesen Informationen zu vergleichen.

**(2.2.1)** Es geht um meine Lieblingszahl, eine zweistellige Zahl, die Sie erraten sollen. Wie wahrscheinlich ist es, daß Sie es schaffen? Wir haben ein Experiment beschrieben und ein Ereignis A = "Erraten", und Sie sollen p(A) berechnen.
Meine Lieblingszahl ist die 28, und ich warte darauf, ob Sie sie erraten oder nicht.
Dann besteht das Zufallsexperiment nunmehr aus Ihrer (zufälligen) Auswahl einer Zahl aus {10, 11, ..., 99}.
**Sie ziehen einmal aus 90. Bei k = 1 gibt es nur eine Variante.**
Das Ereignis A ist nun dasselbe wie "Sie tippen die 28". Da bei der zufälligen Auswahl alle 90 Zahlen die gleiche Chance haben, ist p(A) = p("28") = 1/90.

**(2.2.2)** Es geht noch immer um meine Lieblingszahl, eine zweistellige Zahl, die Sie erraten sollen. Diesmal dürfen Sie aber zwei Zahlen nennen. Da sollte sich Ihre Chance auf A = "Erraten" erhöhen. Vielleicht sogar verdoppeln?
Meine Lieblingszahl ist die 28, und ich warte darauf, ob Sie sie erraten oder nicht. Dann besteht das Zufallsexperiment nunmehr aus Ihrer (für mich ganz zufälligen) Auswahl zweier Zahlen aus {10, 11, ..., 99}.
**Sie ziehen zweimal aus 90.**
Das Ereignis A ist nun dasselbe wie "Sie wählen zwei Zahlen, unter denen die 28 vorkommt".

**Erste Möglichkeit**: mit Reihenfolge, aber Sie sagen nicht zweimal dieselbe Zahl, sondern zwei verschiedene Zahlen. Also **mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen**.
Offenbar sind alle "geratenen Zahlenpaare" gleichwahrscheinlich, und es sind 90·89 Stück. Davon sind für A günstig die Paare, die 28 in der ersten Komponente stehen haben (89 Stück) und die Paare, die 28 in der zweiten Komponente stehen haben (ebenfalls 89 Stück). Überschneidungen gibt es nicht, es sind also 2·89 Paare günstig für A, das heißt
$p(A) = \frac{2 \cdot 89}{90 \cdot 89} = \frac{2}{90}$, die Chancen haben sich also tatsächlich verdoppelt.

**Zweite Möglichkeit**: mit Reihenfolge, aber Sie sagen nicht unbedingt zwei verschiedene Zahlen, (etwa zwei Personen schreiben unabhängig je eine Zahl auf, oder ein Zufallsgenerator spuckt nacheinander zwei Zahlen aus). Also **mit Reihenfolge, mit Zurücklegen.**
Offenbar sind alle "geratenen Zahlenpaare" gleichwahrscheinlich, und es sind 90·90 Stück. Davon sind für A günstig die Paare, die 28 in der ersten Komponente aber nicht in der zweiten Komponente stehen haben (89 Stück) und die Paare, die 28 in der zweiten, aber nicht in der ersten Komponente stehen haben (ebenfalls 89 Stück), und das Paar (28, 28). Überschneidungen gibt es nicht, es sind also 2·89 + 1 Paare günstig für A, das heißt
$p(A) = \frac{2 \cdot 89 + 1}{90 \cdot 90} < \frac{2}{90}$, denn 2·89 + 1 = 2·90 **-** 1 < 2·90. Die Chancen haben sich also weniger als verdoppelt.

Nebenbei: Man war ja aber auch schön blöd, nicht automatisch verschiedene Zahlen zu nennen. Da hat man sich seine Chancen selber verringert.

**Dritte Möglichkeit**: ohne Reihenfolge, aber Sie sagen nicht zweimal dieselbe Zahl, sondern zwei verschiedene Zahlen. Also **ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen**.
Offenbar sind alle "geratenen Mengen von 2 Zahlen" gleichwahrscheinlich, und es sind $\binom{90}{2}$ Stück. Davon sind für A günstig die 2-Mengen, die die Zahl 28 enthalten (89 Stück), es sind

also 89 Paare günstig für A, und  p(A) = $\frac{2 \cdot 89}{90 \cdot 89}$ = $\frac{2}{90}$, die Chancen haben sich also wieder verdoppelt.

**Vierte Möglichkeit**: ohne Reihenfolge, aber Sie sagen nicht unbedingt zwei verschiedene Zahlen, (zwei Personen schreiben unabhängig je eine Zahl auf, den Zetteln sieht man aber nicht mehr an, wer was getippt hat). Also **ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen.**
Hier interessiert vielleicht noch, wie viele Möglichkeiten es gibt, aber gerechnet wird hier zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von A nicht!! Wir dürfen die Laplace-Formel nicht anwenden!! Es gibt nach Formel hier genau $\binom{90+2-1}{2}$ = $\frac{91 \cdot 90}{2 \cdot 1}$ Möglichkeiten (zu tippen). Offenbar sind das die $\binom{90}{2}$ 2-er Mengen von eben, plus die 90 Mengen {10, 10}, {11, 11}, ..., {99, 99}. Günstig für A sind davon: die 89 2-er Mengen aus verschiedenen Zahlen, die die 28 enthalten, und die Menge {28, 28}. Wenn man ihre Wahrscheinlichkeiten berechnet (indem man die Reihenfolge berücksichtigt) und sie addiert, kommt man auch wieder auf p(A) = $\frac{2 \cdot 89 + 1}{90 \cdot 90}$.

| |
|---|
| Entscheidend ist also, ob zurückgelegt wird oder nicht. Darauf kommt es an. |

**(2.2.3)** Es wird dreimal gewürfelt. Ich interessiere mich für das Ereignis A = "zwei gleiche, aber nicht drei gleiche Zahlen".
Offenbar besteht ein Ergebnis dieses Zufallsexperimentes darin, dass "man drei Zahlen zwischen 1 und 6 hat". Es ist also eine **Ziehung "3 aus 6".** Die drei Würfel ziehen jeweils (zeigen zufällig) eine Zahl. Da kein Würfel auf den anderen Rücksicht nimmt und etwa auf eine "Sechs" verzichtet, weil der andere die "Sechs" zeigt, ist die Ziehung sicher **mit Zurücklegen.**
Kann man die Würfel unterscheiden, so kann man die Reihenfolge berücksichtigen, indem man notiert, was der erste Würfel zeigt, dann was der zweite Würfel zeigt, dann was der dritte Würfel zeigt. Dann sind die Ergebnisse (die sämtlichen "Möglichkeiten" für den Ausgang des Experimentes) 3-Tupel von Zahlen aus {1,2,3,4,5,6}. Davon gibt es $6^3$ = 216 Stück. Sie sind gleichwahrscheinlich.
Kann man die Würfel  n i c h t  unterscheiden, so kann man die Reihenfolge  n i c h t  berücksichtigen, und nur notieren, was die drei Würfel denn für drei Zahlen zeigen. Dann sind die Ergebnisse (die sämtlichen "Möglichkeiten" für den Ausgang des Experimentes) 3-Mengen von nicht notwendig verschiedenen Zahlen aus {1,2,3,4,5,6}. Davon gibt es $\binom{6+3-1}{3}$ = 56 Stück. Sie sind  n i c h t  gleichwahrscheinlich.

Zurück zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von A.
Nehmen wir an, wir können die Würfel unterscheiden,
- wenn zum Beispiel dreimal nacheinander mit je einem Würfel gewürfelt wird,

- wenn die Würfel (etwa durch der Farbe) unterscheidbar sind.
Dann können wir die LAPLACE-Formel für die 216 3-Tupel anwenden und brauchen nur noch zu zählen, wie viele von ihnen für A günstig sind.

Versuchen wir, ein "leeres" 3-Tupel von links nach rechts so mit Zahlen aufzufüllen, dass es für A günstig wird. Das ist ein Versuch, also noch ist nicht klar, ob er zum Erfolg führen wird!
Für die erste Komponente gibt es offenbar keine Einschränkungen, es gibt für A günstige Ergebnisse, die jede beliebige Zahl aus {1,2,3,4,5,6} in der ersten Komponente stehen haben. Wir haben also 6 Möglichkeiten für die erste Komponente.
Wenn die erste Komponente besetzt ist, haben wir noch 6 Möglichkeiten für die zweite Komponente, denn durch geeignete Wahl der dritten können wir jedes Paar 1./2.Komponente zu einem für A günstigen Tripel ergänzen.
Bis hierher ging es noch glatt. Aber dann: wenn die ersten beiden Komponenten besetzt sind: wie viele Möglichkeiten habe ich dann für die dritte Komponente, so dass das Tripel für A günstig wird??
Und da gibt es **keine eindeutige Antwort**, keine Zahl $n_3$, die ich hinschreiben könnte, denn **es kommt darauf an, wie die ersten beiden Komponenten aussehen!**
- Wenn da bereits zwei gleiche Zahlen stehen, darf ich alles außer dieser einen Zahl hinschreiben, also wären das 5 Möglichkeiten.
- Wenn da aber zwei verschiedene Zahlen stehen, muss ich eine dieser beiden Zahlen hinschreiben, damit es günstig für A wird. Das wären also 2 Möglichkeiten.
Es gibt also beim Auffüllen **Probleme**; eine **Fallunterscheidung** ist nötig. Und die Fallunterscheidung wird sinnvollerweise immer gleich zu Beginn des Auffüllens gemacht.

Die entscheidende Idee kommt jetzt:
Wenn wir gewusst hätten, wo die beiden gleichen und wo die dritte (davon verschiedene) Zahl zu stehen hatten, wäre das Auffüllen leicht gewesen.
Zählen wir also zuerst, wie viele Möglichkeiten wir haben zu sagen, wo die beiden gleichen Zahlen stehen: da müssen wir 2 der 3 Stellen im Tupel auswählen, das ist also zunächst eine Ziehung "2 aus 3" ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge, da gibt es $\binom{3}{2}$ = 3 Möglichkeiten. Jetzt, da wir wissen, wo die beiden gleichen und wo die dritte (davon verschiedene) Zahl zu stehen haben, ist das Auffüllen leicht:
- für die erste (zum Beispiel linke) der beiden gleichen Komponenten habe ich 6 Möglichkeiten,
- für die zweite der beiden gleichen Komponenten habe ich dann nur noch 1 Möglichkeit,
- für die dritte (von den beiden gleichen verschiedene) Komponente habe ich dann genau 5 Möglichkeiten.

Insgesamt ergibt sich eine Zahl von $\binom{3}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot 5$ = 90 für A günstigen Tripeln.

Also: $p(A) = \dfrac{\binom{3}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 6} = 0{,}417.$

Kommen wir auf das **Problem der Reihenfolge** zurück. Was machen wir, wenn wir die Würfel nicht durch die Reihenfolge unterscheiden können (wenn nämlich mit drei Würfeln

auf einmal gewürfelt wird), und die Würfel auch äußerlich gleich sind ("ununterscheidbar" heißt es dann in den Aufgaben immer)?
Für die Wahrscheinlichkeitsberechnungen dürfen wir dann die Ergebnisse, die wir sehen, die 3-Mengen von nicht notwendig verschiedenen Zahlen, nicht verwenden, weil sie nicht gleichwahrscheinlich sind!!!

**Ausweg:** in Wirklichkeit sind es ja aber doch drei verschiedene Würfel (Individuen), die sich zumindest in den drin enthaltenen "Holzmolekülen" unterscheiden.
I m P r i n z i p sind also drei verschiedene Würfel immer unterscheidbar.
Man könnte sich auch (etwas anschaulicher) vorstellen, dass sie sich in der Farbnuance oder im Gewicht unterscheiden, man also von
- dem hellsten, mittleren und dunkelsten Würfel,
- dem leichtesten, mittleren und schwersten Würfel

sprechen könnte. Oder man denkt sich auf den Würfeln g a a n z klein Nummern geschrieben, die man nur mit starker Vergrößerung erkennen kann, die wir also mit bloßem Auge nicht unterscheiden können. Trotzdem können wir vom Würfel Nummer 1, dem Würfel Nummer 2 und dem Würfel Nummer 3 reden.
Und dadurch die Reihenfolge festlegen. Und als Ergebnisse 3-Tupel von Zahlen hernehmen.

**Zweifel:** Aber – kann ich denn dann bei einer Durchführung des Experimentes überhaupt feststellen, welches Ergebnis (3-Tupel) eingetreten ist?
**Nein, aber das macht nichts**. Gefragt werden wir bei dem Experiment ohnehin nur nach Ereignissen, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt. Der Fragesteller kann ja offenbar die Würfel selber nicht unterscheiden, fragt also auch nicht danach, was welcher Würfel einzeln macht, sondern was insgesamt für Zahlen gewürfelt wurden.
Wir brauchen also sicher auch nie zu sagen, welches Tripel gerade "eingetreten" ist, sondern wir brauchen die Tripel bloß zum Rechnen.
Wenn in der Aufgabe stehen würde: drei ununterscheidbare Würfel werden auf einmal geworfen, ... was zeigt der "erste" Würfel?
Dann sagen wir: "Die Würfel sind ununterscheidbar, also weiß ich nicht, welches der "erste" Würfel sein soll."
Zum Rechnen nehmen wir aber trotzdem den irgendwie (für uns unsichtbar) existierenden Unterschied der drei Würfel dankbar an.

**(2.2.4)** Es wird dreimal gewürfelt. Ich interessiere mich für das Ereignis A = "mindestens eine 6 wird gewürfelt".
Die Ziehung ist wie eben. **3 aus 6, mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge**.
Daher gleich zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von A.
Wir nehmen also trotzdem an, wir könnten die Würfel unterscheiden, benutzen die LAPLACE-Formel für die 216 3-Tupel von nicht notwendig verschiedenen Zahlen aus {1,2,3,4,5,6} und brauchen nur noch zu zählen, wie viele von ihnen für A günstig sind.
Zählen wir erst die Tripel, die gleich in der ersten Komponente eine 6 stehen haben: das sind $1 \cdot 6 \cdot 6$ Stück.
Dann die Tripel, die in der ersten Komponente keine 6, aber dafür in der zweiten Komponente eine 6 stehen haben: das sind $5 \cdot 1 \cdot 6$ Stück.
Und schließlich die Tripel, die in der ersten Komponente keine 6, auch in der zweiten Komponente keine 6 stehen haben, aber dafür in der dritten Komponente eine 6 stehen haben: das sind $5 \cdot 5 \cdot 1$ Stück.

Insgesamt sind also 36 + 30 + 25 = 91 Tripel günstig für A, und $p(A) = \frac{91}{216} = 0{,}421$.

Wir vermerken zwei Dinge:
erstens hat sich die Chance auf (mindestens) eine 6 von einem Wurf auf drei Würfe n i c h t verdreifacht – sonst hätten wir nämlich p(A) = 0,5 gehabt. (siehe zweimal raten)
zweitens war die Berechnung ziemlich umständlich.

Leichter wäre es gewesen, "über das Gegenereignis zu gehen": also das Ereignis B = "überhaupt keine 6" zu betrachten, p(B) auszurechnen und schließlich p(A) = 1 – p(B) zu berechnen.
Machen wir es: Günstig für B sind offenbar 5·5·5 = 125 Tripel, also p(B) = 0,579.
Und p(A) = 1 – 0,579 = 0,421.

**(2.2.5)** In einem Jute-Sack befinden sich 10 Tennisbälle. Sieben sind gelb und drei lila. Ansonsten kann man sie nicht unterscheiden. Es werden vier Bälle gezogen.
**Offenbar handelt es sich um eine Ziehung "4 aus 10".**

Ich interessiere mich für das Ereignis A = "zwei gelbe, zwei lila Bälle".
Offenbar ist das Experiment nicht ausreichend beschrieben. Es muss noch gesagt werden, ob zurückgelegt wird oder nicht.
Wir werden beide Fälle diskutieren.
Außerdem haben wir bisher immer gesagt, dass die Bälle (Kugeln) durchnummeriert sind. Sonst wussten wir ja nicht, welcher Ball gerade gezogen wurde! Und auch nicht, welche Zahl wir in die Mengen oder Tupel hineinschreiben sollten. Und nun: nur gelb oder lila ist zu sehen, keine Nummer.
Was tun?
Machen wir es wie bei den Würfeln, denken wir uns kleine Nummern auf den Bällen.
G a a n z kleine, die wir nicht erkennen können, die aber da sind.
Dann können wir zwar nicht mehr entscheiden, wenn wir die Ziehung durchführen, welcher Ball gerade gezogen wurde, es wurde aber genau einer der Bälle gezogen, und wir müssen halt hoffen, dass wir nur nach Ereignissen gefragt werden, bei denen es keine Rolle spielt, welcher Ball genau gerade gezogen wird. Sonst wissen wir es eben nicht.
Also: es sind im Sack die Bälle 1 bis 10, und wir sagen zum Beispiel, dass die Bälle 1 bis 7 gelb sind, die Bälle 8 bis 10 lila.

Erste Version: **ohne Zurücklegen**.

**Berücksichtigen wir erstmal die Reihenfolge nicht**. Dann haben wir die $\binom{10}{4} = 210$

Mengen von 4 Zahlen aus {1,2,...,10} als Ergebnisse, und sie sind gleichwahrscheinlich.
Wie viele davon sind günstig für A?
Es sind die 4-Mengen, die sich aus einer 2-Menge aus {1,2,...,7} und einer 2-Menge aus {8,9,10} zusammensetzen. Da gibt es $\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{2} = 63$ Stück.

Also: p(A) = $\dfrac{\binom{7}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}}$ = 0,3.

**Berücksichtigen wir die Reihenfolge**, so sind die Ergebnisse die $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$ 4-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,10}.
Zählen wir die für A günstigen Tupel.
Da gibt es erstmal $\binom{4}{2}$ = 6 Möglichkeiten, wann (als wievielte) die beiden gelben Bälle gezogen werden.
Dann ist das Auffüllen leicht: man hat dann jeweils $7\cdot 6\cdot 3\cdot 2 = 252$ solcher 4-Tupel, die günstig sind für A. Insgesamt sind es also 1512 Stück, und p(A) = $\dfrac{1512}{5040}$ = 0,3.
Dass dasselbe herauskommt, ist natürlich kein Zufall. Es ist ja dasselbe Ereignis im selben Versuch.

Zweite Version: **mit Zurücklegen**.

**Berücksichtigen wir erstmal die Reihenfolge nicht**. Dann haben wir die $\binom{10+4-1}{4}$ = 715 aus der Formel, das sind "Mengen" von 4 nicht notwendig verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,10}, als Ergebnisse. Aber sie nützen zur Berechnung von p(A) nichts.

**Berücksichtigen wir die Reihenfolge**, so sind die Ergebnisse die $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10000$ 4-Tupel von nicht notwendig verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,10}.
Zählen wir die für A günstigen Tupel. Wieder haben wir zunächst $\binom{4}{2}$ = 6 Möglichkeiten, wann die beiden gelben Bälle gezogen werden.
Dann ist das Auffüllen leicht: man hat dann jeweils $7\cdot 7\cdot 3\cdot 3 = 441$ solcher 4-Tupel, die günstig sind für A. Insgesamt sind es also 2646 Stück, und p(A) = $\dfrac{2646}{10000}$ = 0,267.
Komischerweise ist durch das Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit von A kleiner geworden. Doch halt! Warum auch nicht?! Es ist ja ein ganz anderes Experiment als ohne Zurücklegen.

**(2.2.6)** In dem Jute-Sack befinden sich noch immer dieselben 10 Tennisbälle. Sieben sind gelb und drei lila. Ansonsten kann man sie nicht unterscheiden. Es werden vier Bälle gezogen. Wie viele Farbzusammenstellungen gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie?
Anders gefragt: **wie viele Möglichkeiten für den Ausgang des Experiments gibt es, wenn mich nur interessiert, welche Farben wie oft gezogen wurden?**

Ergebnisse sind nun {gelb, gelb, gelb, gelb}, {gelb, gelb, gelb, lila} bis {lila, lila, lila, lila}.
Also 5 Möglichkeiten. Können wir das mit einer der Formeln auch herausbekommen?
**Offenbar handelt es sich um eine Ziehung "4 aus 2 (Farben)". Ohne Reihenfolge mit Zurücklegen. Da gibt es nach Formel $\binom{2+4-1}{4}$ = 5 Ergebnisse. Aber das ist ja der "gefährliche" Fall. Unsympathisch. Und außerdem haben die beiden "Kugeln"**

**(Farben) mit Namen "gelb" und "lila" ja nicht die gleiche Chance, gezogen zu werden. Also schnell weg von dieser Überlegung.**

Wahrscheinlichkeiten berechnen wir lieber bei einer "gewöhnlichen" Ziehung. Also hier einer Ziehung von Bällen, nicht Farben. Ich interessierte mich oben bereits für das Ereignis A = "zwei gelbe, zwei lila Bälle". Das war eine dieser Möglichkeiten. Die anderen werden genauso behandelt.
Aber wieder muss natürlich erst geklärt werden, ob zurückgelegt wird oder nicht. Besonders für die Möglichkeit {lila, lila, lila, lila} ist das ziemlich bedeutsam.

**Erste Version: ohne Zurücklegen**:

p({gelb, gelb, gelb, gelb}) = $\dfrac{\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}}$ = 35/210 = 0,167.

p({gelb, gelb, gelb, lila}) = $\dfrac{\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}}$ = 105/210 = 0,5.

p({gelb, gelb, lila, lila}) = $\dfrac{\binom{7}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}}$ = 63/210 = 0,3.

p({gelb, lila, lila, lila}) = $\dfrac{\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{10}{4}}$ = 7/210 = 0,033.

p({lila, lila, lila, lila}) = $\dfrac{\binom{7}{0}\cdot\binom{3}{4}}{\binom{10}{4}}$ = 0/210 = 0.

**Probe**:
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Möglichkeiten, die sich ja gegenseitig aussschließen und alles abdecken, muss 1 ergeben:

0,167 + 0,5 + 0,3 + 0,033 + 0 = 1.

**Zweite Version: mit Zurücklegen**.

p({gelb, gelb, gelb, gelb}) = $\dfrac{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}$ = 2401/10000 = 0,240.

p({gelb, gelb, gelb, lila}) = $\dfrac{\binom{4}{3}\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 3}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}$ = 4116/10000 = 0,412.

p({gelb, gelb, lila, lila}) = $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot 7\cdot 7\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}$ = 2646/10000 = 0,265.

p({gelb, lila, lila, lila}) = $\dfrac{\binom{4}{1}\cdot 7\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}$ = 756/10000 = 0,076.

p({lila, lila, lila, lila}) = $\dfrac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}$ = 81/10000 = 0,008.

**Probe**:
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Möglichkeiten, die sich ja gegenseitig aussschließen und alles abdecken, muss 1 ergeben:

0,240 + 0,412 + 0,264 + 0,076 + 0,008 = 1.

**(2.2.7)** Jute-Sack, alles wie gehabt. Jetzt betrachte ich "lila" als Erfolg, "gelb" als Misserfolg. Ich ziehe und ziehe, und kein Erfolg kommt! Wie viele Bälle muss ich mindestens ziehen, um mindestens einen Erfolg zu haben?
Wenn ich zurücklege eventuell "unendlich oft"! Die Frage ist offenbar falsch gestellt. Sie muss heißen: Wie viele Bälle muss ich mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von (z.B.) mindestens 90% mindestens einen Erfolg zu haben?

Ich rechne einfach aus, wie wahrscheinlich bei n Versuchen (gezogenen Bällen) es ist, mindestens einen Erfolg zu haben. Das gibt eine Formel F(n), in der die natürliche Zahl n, die jetzt für die Anzahl der Versuche steht und nichts mehr mit den 10 Tennisbällen zu tun hat. Dann ist meine Aufgabe, das kleinste n zu finden, so dass F(n) ≥ 0,9.

Aber halt! Weiter oben habe ich gesehen, dass "mindestens einmal" leichter über das Gegenereignis "keinmal" zu behandeln ist. Ich rechne also stattdessen für mein n aus, wie wahrscheinlich "kein Erfolg" ist. Das kleinste n, für das die Wahrscheinlichkeit kleiner gleich 0,1 ist, ist meine gesuchte Zahl. Übrigens: auch diese "3-mal-Mindestens-Aufgaben" kommen später noch einmal. Und es sind gute Klausuraufgaben.

**Erste Version: n Bälle (aus 10) ziehen ohne Zurücklegen**:

Es gilt: p(0 Erfolge) = $\dfrac{7\cdot 6\cdot \ldots\cdot (7-n+1)}{10\cdot 9\cdot \ldots\cdot (10-n+1)}$;

und wir suchen das kleinste n, so dass $\dfrac{7\cdot 6\cdot \ldots\cdot (7-n+1)}{10\cdot 9\cdot \ldots\cdot (10-n+1)} < 0{,}1$

für n = 5 haben wir p(0 Erfolge) = 0,083 < 0,1, also p(≥1 Erfolg) = 0,917 > 0,9;
für n = 4 haben wir p(0 Erfolge) = 0,167 > 0,1, also p(≥1 Erfolg) = 0,833 < 0,9;
Also muss man mindestens 5 Bälle ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einen lila Ball zu ziehen.

**Zweite Version: n Bälle (aus 10) ziehen mit Zurücklegen**:

Es gilt: p(0 Erfolge) = $\frac{7^n}{10^n}$ = $(0{,}7)^n$; und wir suchen das kleinste n, so dass $(0{,}7)^n < 0{,}1$

für n = 7 haben wir p(0 Erfolge) = 0,082 < 0,1, also p(≥1 Erfolg) = 0,918 > 0,9;
für n = 4 haben wir p(0 Erfolge) = 0,176 > 0,1, also p(≥1 Erfolg) = 0,824 < 0,9;
Also muss man hier mindestens 7 Bälle ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einen lila Ball zu ziehen.

**(2.2.8) Wie viele Möglichkeiten gibt es ...?**

Wir haben nunmehr eine ganze Reihe von Beispielen behandelt, und jeweils geschaut, "was bei so einem Zufallsexperiment herauskommt".

Im Prinzip sind das alles offensichtliche Ziehungen "k aus n", also eigentlich kein großes Problem (wir müssen allerdings auf jeden Fall immer noch herausbringen, ob zurückgelegt wird oder nicht!).
Dann muss noch herausbekommen werden, ob die Ergebnisse mit Reihenfolge angegeben werden sollen oder nicht.
Dann erst wissen wir, in welcher Variante von "k aus n", in welcher Variante des Urnenmodells wir uns bewegen.

Und aus der Tabelle wissen wir dann, wie viele Ergebnisse es jeweils gibt und ob sie gleichwahrscheinlich sind oder nicht.
Falls ja, erhält man aus der LAPLACE-Formel sofort die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Ergebnisses (1 im Zähler). Falls nicht (in der Variante mit Zurücklegen/ohne Reihenfolge), müssen wir die Wahrscheinlichkeit der Versuchsausgänge mit Hilfe der LAPLACE-Formel (in der die Ergebnisse mit Reihenfolge benutzt werden) berechnen.

Diese Aufgabe gibt es aber auch etwas allgemeiner, wenn jemanden nicht das "genaue Ergebnis" der Ziehung interessiert, sondern wenn sich jemand nur für entstandene Farbkombinationen oder Anzahlen von lila Bälle usw. interessiert:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Ausgang des Experiments in seinem Sinn?
- Welche Wahrscheinlichkeit haben sie?

Um Wahrscheinlichkeiten auszurechnen, benutzen wir natürlich die Variationen oder Kombinationen aus der Tabelle und die LAPLACE-Formel.
**Aber: wie finden wir heraus, welche "Möglichkeiten" gemeint sind?**

Naiver Zugang: Wir fragen einfach danach, welche der Möglichkeiten bei einer Durchführung des Zufallsexperimentes eingetreten ist, und zählen, wie viele Antworten es auf die Frage gibt.
Um die Antworten leicht abzählen zu können, empfiehlt es sich, die Antwort "mathematisch" hinzuschreiben, also als
- **Zahl**,
- **Tupel** (wenn die Reihenfolge, in der die Objekte hingeschrieben werden, eine Rolle spielt)

- **Mengen** (falls die Reihenfolge der hingeschriebenen Objekte keine Rolle spielt).

Dabei müssen die Elemente in den Tupeln oder Mengen übrigens nicht immer die Kugeln sein, die gezogen wurden. Es können auch Farben sein oder Anzahlen oder ähnliches.

Natürlich müssen unsere Ergebnisse aus der Tabelle hier aber auch vorkommen. Das sind die Möglichkeiten, die man erhält, wenn man sich für das "ganz genaue Ergebnis" der Ziehung interessiert. Sie erhält man, wenn man sich ganz genau für jeden einzelnen der k "Züge" interessiert. Welche Kugel ist jeweils gezogen worden?
Das Vernachlässigen der Reihenfolge ist eigentlich schon ein solcher Fall, wo man sich nicht mehr für jedes Detail interessiert – und es gibt auch weniger "Möglichkeiten", wenn man sich nicht für die Reihenfolge interessiert, als wenn man sich für die Reihenfolge interessiert.

"**Volle Information**" bei einer Ziehung von k Bällen aus einem Reservoir von n Bällen (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) besteht offenbar aus der Angabe,
**welcher Ball als wievielter** gezogen wurde.
Passende Frage: Welcher Ball wurde als wievielter gezogen? Welcher Ball war der erste, zweite, ..., der k-te gezogene Ball?
**Ergebnisse sind k-Variationen mit oder ohne Wiederholungen, je nachdem, ob man zurückgelegt hat oder nicht**.

Wenn man "alle k Bälle auf einmal" zieht, besteht "volle Information" aus der Angabe der k Menge der gezogenen Bälle (ohne Reihenfolge) – es gibt ja keine Reihenfolge.
Also hat man bei Ziehungen ohne Reihenfolge **"volle Information**", wenn man weiß,
**welche Bälle insgesamt** gezogen wurden (**ohne Zurücklegen**),
**welche Bälle wie oft** gezogen werden (**mit Zurücklegen**).
Passende Frage: Welche Bälle wurden insgesamt gezogen? Welches ist die Menge der insgesamt gezogenen Bälle? Welche Bälle wurden wie oft gezogen? (falls zurückgelegt wurde)
**Ergebnisse sind k-Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen, je nachdem, ob man zurückgelegt hat oder nicht**.

Das sind immer noch die Möglichkeiten (Ergebnisse) aus der Tabelle gewesen.
Was ist nun mit andern Fragen, andern Interessen, anderen "Sorten" von Möglichkeiten?

Nun, wenn man sich dafür interessiert (**bei einer Ziehung mit Zurücklegen)**,
**welche Bälle überhaupt** gezogen wurden, interessiert man sich offenbar für die Bälle, die **mindestens einmal** gezogen wurden.
Passende Frage: Welche Bälle sind überhaupt gezogen worden?
Ergebnisse (**Möglichkeiten**) sind dann **Mengen** (Kombinationen ohne Wiederholungen) **von 1, 2 bis zu k Bällen**, denn es ist ja möglich, dass ein einziger Ball k-mal gezogen wurde, oder auch mehrere verschiedene (entsprechend weniger oft).

Man hat also in Wirklichkeit von den "volle Informations-" Möglichkeiten (k-Kombinationen mit Wiederholung) einfach nur die "überflüssigen" rausgeschmissen. Oder, anders ausgedrückt, man hat **alle die Ergebnisse als gleich angesehen, die dieselben Bälle (nur verschieden oft) enthalten.** Es ist also ein so ähnliches Vorgehen, wie wenn man die Reihenfolge nicht berücksichtigt (sich nicht für sie interessiert).

Alternativ könnte man sich dafür interessieren (**bei einer Ziehung mit Zurücklegen)**, **welche Bälle nicht** gezogen wurden, dann interessiert man sich offenbar für die Menge der Bälle, die **keinmal** gezogen wurden.
Passende Frage: Welche Bälle sind überhaupt nicht gezogen worden?
Ergebnisse (**Möglichkeiten**) sind dann **Mengen** (Kombinationen ohne Wiederholungen) **von 0, 1, 2 bis zu n-1 Bällen**, es sind die Komplemente der eben behandelten Mengen.

Wenn man sich dafür interessiert (**bei einer Ziehung mit Zurücklegen)**,
**wie viele Bälle überhaupt** gezogen wurden, interessiert man sich offenbar für die Mächtigkeiten der Kombinationen von Bällen, die mindestens einmal gezogen wurden.
Passende Frage: Wie viele verschiedene Bälle sind überhaupt gezogen worden?
Ergebnisse (**Möglichkeiten**) sind dann die **Zahlen 1, 2, ..., k.**
**Es gibt also k Stück (falls n ≥k).**

Wenn man sich dafür interessiert (**bei einer Ziehung mit Zurücklegen)**,
**wie oft ein bestimmter Ball** gezogen wurden, interessiert man sich offenbar dafür, wie oft dieser bestimmte Ball in den k-Kombinationen von Bällen auftreten kann.
Passende Frage: Wie oft ist eigentlich dieser eine Ball gezogen worden?
Ergebnisse (**Möglichkeiten**) sind dann die **Zahlen 0, 1, ..., k. Es gibt also k+1 Stück**.

Wenn man sich dafür interessiert (**bei einer Ziehung mit oder ohne Zurücklegen)**,
**ob ein bestimmter Fall** eingetreten ist, gibt es genau zwei Möglichkeiten (ja oder nein).

Übrigens:
Wenn man sich (**bei einer Ziehung ohne Zurücklegen)**, dafür interessiert, **wie viele Bälle überhaupt** gezogen wurden, muss man eigentlich ein bisschen bescheuert sein, denn es steht ja in der Beschreibung der Ziehung, dass es k Stück sein sollen. Dann gibt es hier also nur eine einzige Möglichkeit.
Oder: Wenn man sich (**bei einer Ziehung ohne Zurücklegen)**, dafür interessiert, **wie oft ein bestimmter Ball** gezogen wurde, ist das auch nicht schwer: natürlich zwei Möglichkeiten (einmal oder keinmal).
Eine Frage nach "diesen Möglichkeiten" wäre also nur ein kleiner Test, ob Sie noch wach sind.

**(2.2.9) "Ununterscheidbarkeit".**

Bisher haben wir stets angenommen, dass man die gezogenen Kugeln notieren kann. Das bedeutete doch aber, dass man die n Bälle (Kugeln, Haken, ...) unterscheiden kann. Was passiert denn bei einer Ziehung "k aus n", wenn man die n Kugeln nicht unterscheiden kann? Wie viele Möglichkeiten (Ergebnisse) gibt es dann?

Denken wir uns ein beliebiges Ergebnis dieser Ziehung: es handelt sich um eine k-Variation (mit Reihenfolge) oder eine k-Kombination (ohne Reihenfolge) von lauter ununterscheidbaren (also gleichen) Kugeln. Jedes weitere Ergebnis (jede weitere Möglichkeit) sieht genauso aus! Wir können die Ergebnisse nicht unterscheiden – es ist dasselbe Ergebnis.
Es gibt also in dieser Situation jeweils nur eine einzige Möglichkeit. (Es handelt sich in Wirklichkeit um eine Ziehung "k aus 1", natürlich mit Zurücklegen, und jetzt sagen sogar unsere Formeln, dass es nur eine Möglichkeit gibt.)
Also: **Wenn sich die Kugeln überhaupt nicht unterscheiden lassen**, dann liegt eigentlich nur eine einzige Kugel in der Urne, und man zieht "k aus 1". Die Möglichkeiten kann man noch nach Formel abzählen: es **kommt stets 1 heraus**. Aber das ist **völlig uninteressant**.

Und **wenn sich von den Kugeln** nicht jede von jeder anderen **unterscheiden** lässt, aber doch einige von einigen anderen (**etwa durch die Farbe**)?
Dann ist es in Wirklichkeit eine **"Ziehung" von k Stück aus der Menge der m vorkommenden Farben** und wir können unsere Anzahlformeln mit dem neuen m (der Anzahl Farben) benutzen.
Aber Vorsicht: es ist keine Ziehung "k aus m" nach dem Urnenmodell mehr, mit dem wir irgendwelche Wahrscheinlichkeiten nach der LAPLACE-Formel ausrechnen könnten – denn die Farben haben meist nicht dieselbe Chance, gezogen zu werden, wie es von den n Kugeln im Urnenmodell stillschweigend angenommen wird.
Zur Berechnung von Möglichkeits-Anzahlen funktioniert diese Identifizierung mit "k aus m" noch – zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten müssen wir auf das Ausgangsmodell "k aus n" zurückgehen.

Das waren Beispiele, dass man im Aufgabentext etwas von "ununterscheidbaren" oder "ansonsten, außer der Farbe, ununterscheidbaren" Kugeln (das sind die n "Dinge", die gezogen werden) liest. Für Berechnungen denkt man sich, sie trügen kleine Nummern, die man bloß nicht sehen kann.

**Ununterscheidbar sind nach Aufgabentext aber oft die k "Dinge":**
- k gleich aussehende Kugeln, die auf n Fächer verteilt werden, (Roulette mit k Kugeln)
- k gleich aussehende Mäntel, die an Haken gehängt werden,
- k Würfel, die gleichzeitig geworfen werden und gleich aussehen.

**Das ist etwas anderes**:
**das "ununterscheidbar" heißt hier nur, dass ich keine Reihenfolge bei der Ziehung sehen kann.**
Aber auch da kann man für Berechnungen so tun, als gäbe es trotzdem eine Reihenfolge.

**(2.2.10) Was ist k und was ist n? Welche Variante liegt vor?**

Beim Betrachten der Beispiele fällt auf, dass man, wenn man ein Ergebnis einer Ziehung "k aus n" vorliegen hat, **zu jedem der k Objekte genau eines der n Objekte** "dastehen hat". Wohingegen manche der n Objekte gar nicht "dranzukommen brauchen" oder auch mehrfach "drankommen".

**Beispiel**: Klar ist: jeder Mantel wird an genau einen der Haken gehängt, also sind es k Mäntel und n Haken.
**Gegenprobe**: Manche Haken werden nicht benutzt, es können also nicht die Haken die k Objekte sein. Oder: an manchen Haken hängen zwei Mäntel, es können also nicht die Haken die k Objekte sein.
Ein Ergebnis dieses Experiments besteht also aus der Angabe der "behängten" (gezogenen) Haken. Es ist ein k-Tupel von Haken-Nummern, wenn man die Mäntel unterscheiden kann, eine k-Menge, wenn man es nicht kann. Die Variationen von Haken sind ohne oder mit Wiederholungen, je nachdem, ob die Haken jeweils nur einen oder auch mehrere Mäntel tragen können.

Stellen wir uns also vor, wir haben ein Ergebnis der Ziehung als Beispiel aufgeschrieben (das empfehle ich immer!) :
**was man sieht, sind Objekte aus der Menge der n** Objekte (sagen wir: Kugeln),
und **wie viele man sieht, das ist das k** (nämlich zu jedem der k Objekte jeweils eines).
Wenn ein k-Tupel (k-Variation) dasteht, war wohl die Reihenfolge wichtig:
die k Objekte sind durchnummeriert, und an der i-ten Position im Tupel steht die vom Objekt i gezogene Kugel.
Wenn eine k-Menge (k-Kombination) dasteht, war wohl die Reihenfolge unwichtig: es stehen in irgendeiner Reihenfolge die von den k Objekten gezogenen Kugeln da.

So ein **Ergebnis** einer Ziehung "k aus n" erinnert also an eine **Abbildung von der Menge der k Objekte in die Menge der n Objekte**.
Jedes Element aus dem Definitionsbereich (k) erhält **genau ein** "Zugeordnetes" aus dem Zielbereich (n).

Und es erinnert nicht nur daran, sondern
- es ist genau eine solche Abbildung, wenn man sich für "die Reihenfolge" (wer kriegt welches Bild) interessiert,
- es ist genau die Wertemenge dieser Abbildung, wenn man sich nicht für "die Reihenfolge" (welches Bild tritt wie oft auf) interessiert.

Wenn man also herausfinden möchte, welches die k und welches die n Objekte sind, muss man sich ein Ergebnis des Versuchs (als Abbildung) hinschreiben. Das, was man hinschreibt, sind die Bilder (sie stammen aus den n Objekten); wie viele man hinschreibt, gibt das k an. Wenn man die Bilder geordnet (als k-Tupel) hinschreibt, gibt man die Abbildung selbst an (mit Reihenfolge), wenn man nur eine ungeordnete Menge von k Bildern hinschreibt, gibt man nur die Wertemenge der Abbildung an (ohne Reihenfolge).

Und wie sieht es mit "mit Zurücklegen"/"ohne Zurücklegen" aus?

Das ist die Frage nach der Injektivität der Abbildungen.

## (2.3) Lotto (Mittwochs- oder Samstagslotto: "6 aus 49")

Hier diskutieren wir eine "echte" Ziehung aus dem richtigen Leben, das **gewöhnliche Zahlenlotto**.

Es geht um ein Glücksspiel, bei dem man 6 Zahlen aus den Zahlen 1 bis 49 vorhersagt (auf dem Tippschein ankreuzt), und bei dem man desto mehr gewinnt, je mehr dieser 6 Zahlen bei der mittwochs oder auch samstags durchgeführten Ziehung ebenfalls gezogen werden. Wir vernachlässigen hier die Superzahl, denken uns also zurück in die Zeit vor Jahren, als die Superzahl noch nicht eingeführt war. Und lassen auch den Jackpot beiseite, der heute manchmal die Leute scharenweise zum Spielen verlockt.

Für die, die es noch nie gemacht und gesehen haben:
- Sie kreuzen auf einem quadratischen Zahlenschema 6 der Zahlen an. Es ist nicht erkennbar, in welcher Reihenfolge Sie das gemacht haben. Diesen Tippschein, der also aus einer Menge von 6 der Zahlen 1, 2, ..., 49 besteht, geben Sie im LOTTO-Geschäft ab und bezahlen (etwa 5 DM).
- Einige Tag später findet die Ziehung im Fernsehstudio statt. In einer großen Glastrommel rollen wild durcheinander 49 Kugeln, die mit den Zahlen 1 bis 49 beschriftet sind.

Nach jeweils einer bestimmten Zeit (wenn genug "gemischt" ist), öffnet sich automatisch ein Türchen in der Trommel, durch das eine der in der Trommel befindlichen Kugeln die Trommel verlässt und in ein bereitgehaltenes Fach plumpst.
Dieser Vorgang (bei dem die Kugeln in der Trommel immer weniger werden) wird 6 mal wiederholt (also insgesamt sieben mal, mit jeweils abnehmender Kugelzahl in der Trommel) durchgeführt.
Die ersten sechs der gezogenen sieben Zahlen sind die Gewinnzahlen, die nachträglich der Größe nach geordnet und vorgelesen werden. Die siebte gezogene Zahl ist die sogenannte Zusatzzahl.

Wenn Ihr Tippschein genau die sechs Gewinnzahlen enthält, haben Sie einen "Sechser" oder auch "6 Richtige". Das bringt den höchsten Gewinn (bis zu 1 Mio DM, abhängig davon, wieviele Leute sechs Richtige haben).

Wenn Ihr Tippschein genau fünf der sechs Gewinnzahlen enthält, und noch dazu die Zusatzzahl, haben Sie "5 Richtige mit Zusatzzahl". Das bringt den zweithöchsten Gewinn.

Dann geht es (gewinnmäßig) abwärts.
Wenn Ihr Tippschein genau fünf der sechs Gewinnzahlen enthält, aber nicht die Zusatzzahl, haben Sie "5 Richtige ohne Zusatzzahl".
Wenn Ihr Tippschein genau vier der sechs Gewinnzahlen enthält, haben Sie "4 Richtige".
Wenn Ihr Tippschein genau drei der sechs Gewinnzahlen enthält, haben Sie "3 Richtige". Das bringt Ihnen übrigens grade mal (etwa) den doppelten Einsatz als Gewinn.

Bei "Vierer" und "Dreier" spielt die Zusatzzahl keine Rolle. (* Eventuell ist das geändert worden!)
Für noch weniger Richtige gibt es keinen Gewinn mehr.

Es gibt wie beim Erraten der Glückszahl weiter oben auch hier mehrere Sichtweisen, wie man "Lotto" als "Ziehung" interpretieren könnte.

**1. Sichtweise:** Man hat 6 Zahlen angekreuzt, der Tippschein ist abgegeben, und die "zufällige" Ziehung erfolgt (wie beschrieben) im Fernsehen. Es ist eine Ziehung "6 aus 49, ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge", oder "6 aus 49, ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge", oder "7 aus 49, ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge".
Interessant sind "Übereinstimmungen" der gezogenen Gewinnzahlen mit meinem vorliegenden Tippzettel.

**2. Sichtweise:** Man weiß, da wird am Samstag wieder im Fernsehen eine bestimmte Menge von 6 Zahlen (die Menge der Gewinnzahlen) gezeigt, und ich sitze da und verteile zufällig meine Kreuzchen. Es ist eine Ziehung "6 aus 49, ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge".
Interessant sind "Übereinstimmungen" meiner sechs Kreuzchen mit den vorliegenden Gewinnzahlen.

**3. Sichtweise:** Es ist ein aus zwei "zufälligen", unabhängigen Ziehungen zusammengesetztes Experiment. Interessant sind "Übereinstimmungen" zwischen den Ergebnissen der beiden Ziehungen.

Trotzdem will ich aber zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit einer "Fünf" wissen. Hat das Ereignis "eine Fünf" in allen drei Sichtweisen dieselbe Wahrscheinlichkeit?
Wir werden später bei bedingten Wahrscheinlichkeiten darauf zurückkommen. Hier nur ein analoges Beispiel, das wir leichter übersehen.
Stellen Sie sich vor, Sie spielen folgendes Spiel.
Ich habe einen grünen Würfel, mit dem ich gleich einmal würfeln werde. Sie setzen 10 Pfennige und geben einen Tipp ab, was ich wohl würfeln werde. Wenn Sie richtig getippt haben, bekommen Sie von mir 1 DM. Wenn Sie falsch getippt haben, behalte ich Ihren Einsatz.
Wie groß sind nun Ihre Chancen zu gewinnen (Ereignis G)?
Und wo sind die drei Sichtweisen?

**1. Sichtweise:** Sie haben Ihren Tipp abgegeben, also eine von 6 Zahlen genannt, die "zufällige" Ziehung erfolgt durch mein Würfeln mit dem grünen Würfel. "1 aus 6", die "sämtlichen Möglichkeiten" sind die Zahlen, die der grüne Würfel zeigen kann.
Günstig ist davon nur eine (die, die Sie getippt haben).
LAPLACE-Formel: $p(G) = 1/6$.

**2. Sichtweise:** Sie wissen, da werde ich gleich (mit dem grünen Würfel) eine von 6 Zahlen (die Menge der Gewinnzahlen) ermitteln, und Sie sollen nun eine der Zahlen "tippen",

zufällig auswählen. Sie könne sich dabei durch einen roten Würfel helfen lassen, es ist jedenfalls eine Ziehung "1 aus 6".
Die "sämtlichen Möglichkeiten" sind die Zahlen, die Ihr roter Würfel zeigen kann.
Günstig ist davon nur eine (die, die mein grüner Würfel gleich zeigen wird).
LAPLACE-Formel: $p(G) = 1/6$.

**3. Sichtweise:** Es ist ein aus zwei "zufälligen", unabhängigen Ziehungen zusammengesetztes Experiment. Es wird mit zwei (unterscheidbaren) Würfeln gewürfelt. Es ist jedenfalls eine Ziehung "2 aus 6, mit Zurücklegen, mit Reihenfolge".
Die "sämtlichen Möglichkeiten" sind die Paare der Zahlen, die Ihr roter Würfel und mein grüner Würfel zeigen können.
Günstig ist davon sind sechs (die, bei denen die beiden Würfel die gleiche Zahl zeigen).
LAPLACE-Formel: $p(G) = 6/36 = 1/6$.

Interessant sind "Übereinstimmungen" zwischen den Ergebnissen der beiden Ziehungen.

Wir wollen uns auf die beiden ersten Sichtweisen beschränken. Die dritte ist zu umständlich.

Wir gehen also entweder davon aus, dass wir auf dem Tippschein sechs Zahlen angekreuzt haben, die Menge M der 49 Zahlen 1, 2, ..., 49 ist also aufgeteilt in die Teilmenge T der 6 getippten, und die Teilmenge NT der 43 nicht getippten Zahlen.
Nun zieht das Ziehungsgerät.
Es handelt sich wahlweise um eine Ziehung
(a) 7 aus 49 mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen
(b) 6 aus 49 mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen
(c) 6 aus 49 ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen
je nachdem, ob man sich ausschließlich für die Gewinnzahlen oder auch die Zusatzzahl, und die Reihenfolge der gezogenen Gewinnzahlen interessiert.

Im Fall (a), bei dem wir uns dafür interessieren, welche Zahl als wievielte gezogen wird (also welche 7 Zahlen in welcher Reihenfolge) haben wir $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43$ Möglichkeiten (7-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, 2, ... , 49\}$, Variationen ohne Wiederholungen).

Im Fall (b), wo wir uns dafür interessieren, welche Gewinnzahl als wievielte gezogen wird (also welche 6 Zahlen in welcher Reihenfolge) haben wir $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten (6-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, 2, ... , 49\}$, Variationen ohne Wiederholungen).

Im Fall (c), wo wir uns dafür interessieren, welche Gewinnzahlen überhaupt gezogen werden (also welche 6 Zahlen ohne Reihenfolge) haben wir $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten (6-Teilmengen aus $\{1, 2, ... , 49\}$, Kombinationen ohne Wiederholungen). Diese Anzahl liegt bei etwa 13 Millionen.

Wenn man Lotto spielt, hat man also eine Chance von 1 : 13 Millionen, alle sechs Gewinnzahlen richtig getippt zu haben.

Oder wir gehen also davon aus, dass das Ziehungsgerät sechs Gewinnzahlen und eine Zusatzzahl ziehen wird, die Menge M der 49 Zahlen 1, 2, ..., 49 ist also aufgeteilt in die Teilmenge G der 6 Gewinnzahlen, die Teilmenge {ZZ} der Zusatzzahl und in die Menge N der 42 "Nieten".
Nun ziehen wir "6 aus 49", ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge.
Wie oben gibt es $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten (6-Teilmengen aus {1, 2,... , 49}, Kombinationen ohne Wiederholungen).

In allen vier Fällen wissen wir: die Möglichkeiten sind jeweils gleichwahrscheinlich. Wir können sie für die Laplace-Formel hernehmen.

**Wir wollen uns nun für andere Fragen interessieren, und ausrechnen, wieviele "Möglichkeiten" es da jeweils gibt.** ("gezogen" nennen wir stets die sechs Gewinnzahlen, also ohne Zusatzzahl, wenn nicht anders erwähnt)

**(2.3.1) Wieviele Möglichkeiten** (mögliche Ergebnisse, Versuchsausgänge) **gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie jeweils, wenn mich nur interessiert**, **ob die 1 gezogen wird?**

**Antwort: 2 Möglichkeiten: "ja" oder "nein"**

Klar gibt es auf die Frage, **ob** irgendetwas eintritt, nur die Antworten "ja" und "nein".
**Als "sämtliche Möglichkeiten", mit denen ich die Wahrscheinlichkeit von "ja" oder "nein" ausrechne, nehme ich die 6-er Mengen, die das Ziehungsgerät zieht.**

Um die Wahrscheinlichkeit von "ja" ausrechnen zu können, brauche ich also einen Überblick über die Mengen von 6 Zahlen aus {1, ..., 49}, die die Zahl 1 enthalten. Das sind die für "ja" günstigen. Wie sieht so eine Menge aus?
Zum Beispiel: {1, 4, 12, 29, 30, 31}, oder auch {1, 11, 12, 29, 34, 37}.
Was ist ihnen gemeinsam, was unterscheidet sie?
Klar: die 1 liegt jeweils drin, und die anderen 5 Zahlen sind nicht alle dieselben, d.h. die "Rest-5-er-Mengen" aus {2, 3, ..., 49} sind verschieden.
Auf diese 5-er Mengen sollten wir uns beim Zählen konzentrieren. Schreiben wir {1, 4, 12, 29, 30, 31} doch einfach (in Gedanken) als Paar ( {1}, {4, 12, 29, 30, 31}), indem wir die 1 in die erste Komponente, den Rest in die zweite Komponente schreiben. Das können wir bei jeder unserer 6-er Mengen, die die 1 enthalten, so machen, und erhalten Paare, die vorne die Menge {1}, hinten eine 5-er Menge aus {2,...,49} stehen haben.
Zwei verschiedene unserer 6-er Mengen unterscheiden sich (als Paare) sicher in der zweiten Komponente (sonst wären sie ja gleich), und zu jeder nur denkbaren 5-er Menge aus {2, 3, ..., 49} als zweiter Komponente bekommen wir durch Hinzunehmen der 1 eine 6-er Menge aus

{1, 2, ... ,49}, die die 1 enthält. Es gibt also genauso viele 6-er Mengen, die 1 enthalten, wie solche Paare. Wir haben die 6-er Mengen bloß anders hingeschrieben, wir haben nichts an ihrer Anzahl geändert.
Aber zu zählen haben wir nun Paare, für die die Multiplikationsregel anwendbar ist:
Es gibt 1 Möglichkeit für die erste Komponente, und wenn die festgelegt ist, gibt es $\binom{48}{5}$ Möglichkeiten für die zweite Komponente. Insgesamt also $1 \cdot \binom{48}{5} = \binom{48}{5}$ Paare.

Es ergibt sich also

**p("ja, 1 wird gezogen") =** p("ja") = $\binom{48}{5} / \binom{49}{6}$ = **6/49.**

Die für "1 wird nicht gezogen", also für "nein" günstigen 6-er Mengen sind offenbar genau diejenigen, deren Zahlen alle aus {2, 3, ..., 49}, stammen, und das sind genau $\binom{48}{6}$ Stück.

Es ergibt sich also

**p("1 wird nicht gezogen") =** p("nein") = $\binom{48}{6} / \binom{49}{6}$ = **43/49.**

Und jetzt sehen wir auch, daß wir eine der beiden Rechnungen hätten sparen können: es handelt sich bei "ja" und "nein" um Gegenereignisse zueinander, und da wissen wir schon, wie sich die Wahrscheinlichkeiten zueinander verhalten:

$$p(\text{"ja"}) = 1 - p(\text{"nein"}) = 1 - 43/49 = 6/49.$$

Übrigens: wie wir sehen, gilt $\binom{48}{5} + \binom{48}{6} = \binom{49}{6}$. Ist das ein Zufall?

Nein, wir werden noch darauf zurückkommen.

Fragen wir uns, ob wir p("ja") = 6/49 nicht auch anders herausbekommen hätten.

**Die einfachste Idee ist leider ein Trugschluß.**
Idee: Es geht doch eigentlich um die 1 und ihre Chance "dabei zu sein". Jede Zahl hat bei der Ziehung die gleiche Chance, dabei zu sein.
Weil es 49 Kugeln sind, hat jede also die Chance 1/49 . (???)
**Wieso bekommen wir was falsches heraus?**
Nun: das mit der gleichen Wahrscheinlichkeit stimmt natürlich, aber das "also" war nicht zulässig. **Die Möglichkeiten "1", "2", ... bis "49" schließen sich ja nicht gegenseitig aus - also können wir sie nicht in der Laplace-Formel verwenden.**

Aber so könnte es gehen:
Die Wahrscheinlichkeit p einer bestimmten Zahl, Gewinnzahl zu sein, ist ja für alle 49 Kugeln dieselbe. Sie könnte man durch eine Ziehung ermitteln. (eine Ziehung "1 aus 49")
**Man zieht eine Kugel, und fragt sich, ob es eine der Gewinnzahlen ist.** Nach unserer Definition von p ist die Wahrscheinlichkeit dafür genau p.
Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit mit der LAPLACE-Formel:

Unter den 49 Zahlen, aus denen man nun zieht, sind genau sechs Gewinnzahlen. Also hat man 6 günstige bei 49 Möglichkeiten, d.h. p = 6/49.

Diese Diskussion ist für meinen Geschmack hart am Abgrund und man kann leicht irgendwelchen Trugschlüssen aufsitzen. Mitunter rechnet man nämlich Wahrscheinlichkeiten für ein und dasselbe Ereignis mit Zusatzbedingungen aus, was meist zu einer erhöhten (einer bedingten) Wahrscheinlichkeit führt (eine Bedingung, also Zusatzinformation, verändert manchmal die Wahrscheinlichkeit, dass etwas eintritt).
Fazit: am sichersten nimmt man die bekanntermaßen gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten und verzichtet auf Experimente. Erst wenn das gesuchte p berechnet ist, könnte man sich nach anderen Wegen umschauen.

**(2.3.2) Wieviele Möglichkeiten** (mögliche Ergebnisse) **gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie jeweils, wenn mich nur interessiert, wie viele meiner 6 getippten Zahlen gezogen werden** (= wie viele Richtige ich habe)**?**
**7 Möglichkeiten (keine, eine, zwei, drei, vier, fünf, alle sechs)**

Klar gibt es auf die Frage die Antworten 0 bis 6.
**Als "sämtliche Möglichkeiten", mit denen ich die Wahrscheinlichkeit von "0" bis "6" ausrechne, nehme ich die 6-er Mengen, die das Ziehungsgerät zieht. Diesmal benutze ich aber auch die Zerlegung der Menge M in T und NT.**

Wie sieht es hier mit den Wahrscheinlichkeiten aus?
Welche der 6-er Mengen sind günstig für "keine richtige Zahl"?
Genau die, die all ihre sechs Zahlen aus der Menge NT, der 43 von uns nicht getippten Zahlen, haben. Das sind offenbar genau $\binom{43}{6}$ Stück.
Es ergibt sich also
**p("0 Richtige") =** $\binom{43}{6} / \binom{49}{6}$ **= (43·42·41·40·39·38)/(49·48·47·46·45·44) ≈ 0,4359.**

Welche der 6-er Mengen sind günstig für "genau eine richtige Zahl"?
Genau die, die genau eine Zahl aus T, und fünf ihrer sechs Zahlen aus der Menge NT haben.
Wie können wir die abzählen? Versuchen wir den "Trick" von vorhin: machen wir Paare aus den 6-er Mengen, indem wir erst die "Zahl, die in T liegt", dann die "fünf Zahlen, die in NT liegen" aufschreiben.
Offenbar ist die Zuordnung wieder bijektiv. Nach der Multiplikationsregel folgt:
6 Möglichkeiten für die erste Komponente und dann jeweils $\binom{43}{5}$ für die zweite Komponente liefert insgesamt $6 \cdot \binom{43}{5}$ Paare.

Es ergibt sich also

**p("1 Richtige") =** $6\cdot\binom{43}{5}/\binom{49}{6}$ = **(6·43·42·41·40·39·6)/(49·48·47·46·45·44) ≈ 0,4130.**

Die für "genau zwei Richtige" günstigen Möglichkeiten schreiben wir gleich als Paare auf: erst die 2-er Menge aus T, dann die 4-er Menge aus NT, das ergibt $\binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}$ Möglichkeiten. Es ergibt sich also

**p("2 Richtige") =** $\binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}/\binom{49}{6}$ **= (6·5·43·42·41·40·39·6)/(2·49·48·47·46·45·44) ≈0,1324**

Und analog

**p("3 Richtige") =** $\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}/\binom{49}{6}$ **=(6·5·4·43·42·41·6·5·4)/(3!·49·48·47·46·45·44) ≈ 0,0176**

**p("4 Richtige") =** $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}/\binom{49}{6}$ **=(6·5·43·42·6·5·4·3)/(2·49·48·47·46·45·44) ≈ 0,00096.**

**p("5 Richtige") =** $\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}/\binom{49}{6}$ **= (6·43·6·5·4·3·2)/(49·48·47·46·45·44) ≈ 0,000018.**

**p("6 Richtige") =** $\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}/\binom{49}{6}$ = **(1·1·6·5·4·3·2)/(49·48·47·46·45·44) ≈ 0,000007.**

Hierbei wurden in den Brüchen Formeln für die Binomialkoeffizienten eingesetzt und die offensichtlichen Kürzungen durchgeführt.
Es liegen zwei Fragen nahe:
Die 7 Möglichkeiten decken ja alles ab und schließen sich gegenseitig aus. Dann müßten sich ihre Wahrscheinlichkeiten doch zu 1 aufaddieren!?
Tun sie auch (auf vier Stellen nach dem Komma gerundet, daher mit kleinem Fehler versehen): 0,4359 + 0,4130 + 0,1324 + 0,0176 + 0,0009 + 0 + 0 = 0,9998

**Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, überhaupt einen Gewinn zu erzielen?**
Wir wissen ja, daß ein Dreier schon etwas bringt. Also ist wegen der Additivität der Wahrscheinlichkeit bei sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen:
p(Gewinn) = p(Dreier) + p(Vierer) + p(Fünfer) + p(Sechser) = 0,0185.
Man hat also eine Chance von 1,85% zu gewinnen.

Aber da war doch noch etwas mit der "5 mit Zusatzzahl"! Muß die nicht auch irgendwie als Gewinn gezählt werden?
Muß schon, ist aber bei den normalen Fünfern bereits mitgezählt. Die Wahrscheinlichkeit für "Fünf mit Zusatzzahl" werden wir weiter unten berechnen.

Die Anzahl günstiger Möglichkeiten für i Richtige (2 ≤ i ≤ 6) ist von der Form $\binom{6}{i}\cdot\binom{43}{6-i}$.

Paßt das auch zu unserer Formel für 0 Richtige und 1 Richtige?
Klar. Einfach i = 0 und i = 1 einsetzen.

**(2.3.3) Wieviele Möglichkeiten** (mögliche Ergebnisse) **gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie jeweils, wenn mich nur interessiert**, **wie viele der gezogenen Zahlen gerade Zahlen sind?**

**wieder 7 Möglichkeiten (keine, eine, zwei, drei, vier, fünf, alle sechs)**

Wie sieht es hier mit den Wahrscheinlichkeiten aus?
Welche der 6-er Mengen sind günstig für "keine gerade Zahl darunter"?
Genau die, die all ihre sechs Zahlen aus der Menge der ungeraden Zahlen, also aus {1,3,5,7, 9, ..., 49} haben. Das sind offenbar genau $\binom{25}{6}$ Stück, denn es gibt 25 ungerade und 24 gerade unter den ersten 49 natürlichen Zahlen.
Es ergibt sich also

**p("keine gerade Zahl dabei") =** $\binom{25}{6} / \binom{49}{6}$ **≈ 0,0126.**

Und die Wahrscheinlichkeit von "genau eine gerade Zahl"?
Welche der 6-er Mengen sind günstig für "genau eine gerade Zahl"?
Genau die, die genau eine Zahl aus {2,4,6,...,48}, und fünf ihrer sechs Zahlen aus der Menge {1,3,5,7,9, ..., 49}haben.
Wie können wir die abzählen? Versuchen wir den "Trick" von vorhin: machen wir Paare aus den 6-er Mengen, indem wir erst die "eine gerade Zahl", dann die "fünf ungeraden Zahlen" aufschreiben.
Zum Beispiel wird dann aus {3, 16, 17, 21, 25, 49} das Paar ({16}, {3, 17, 21, 25, 49}).
Und wieder ändert das an der Anzahl nichts, die Zuordnung ist bijektiv. Nach der Multiplikationsregel folgt: 24 Möglichkeiten für die erste Komponente und dann jeweils $\binom{25}{5}$ für die zweite Komponente liefert insgesamt $24 \cdot \binom{25}{5}$ Paare.

Es ergibt sich also

**p("genau eine gerade Zahl dabei") =** $24 \cdot \binom{25}{5} / \binom{49}{6}$ **≈ 0,0912.**

Die Zahlenwerte der Wahrscheinlichkeiten von
"0 Richtige" bzw. "0 gerade Zahlen", und von "1 Richtige" bzw. "1 gerade Zahl"
sind verschieden, aber die Art, sie auszurechnen, die Formel, ist jeweils gleich. In beiden Fällen zieht man 6 mal ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge aus 49, und fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß genau i der sechs gezogenen Zahlen aus einer vorher festgelegten Teilmenge stammen.
Im einen Fall waren es die 6 "Richtigen", und man hatte 43 "Falsche", im anderen Fall waren es 24 "Richtige", und man hatte 25 "Falsche".

Offenbar erhält man auch die weiteren gefragten Wahrscheinlichkeiten auf diese Weise:

**p("genau zwei gerade Zahlen dabei") =** $\binom{24}{2} \cdot \binom{25}{4} / \binom{49}{6}$ **≈ 0,2496.**

**p("genau drei gerade Zahlen dabei") =** $\binom{24}{3}\cdot\binom{25}{3}\ /\ \binom{49}{6}$ **≈ 0,3329.**

**p("genau vier gerade Zahlen dabei") =** $\binom{24}{4}\cdot\binom{25}{2}\ /\ \binom{49}{6}$ **≈ 0,2279.**

**p("genau fünf gerade Zahlen dabei") =** $\binom{24}{5}\cdot\binom{25}{1}\ /\ \binom{49}{6}$ **≈ 0,0759.**

**p("alle sechs gerade Zahlen dabei") =** $\binom{24}{6}\cdot\binom{25}{0}\ /\ \binom{49}{6}$ **≈ 0,0096.**

Wieder ergibt sich: 0,0126 + 0,0912 + 0,2496 + 0,3329 + 0,2279 + 0,0759 + 0,0096 = 0,9997

Und wir können unsere Erkenntnisse in einem Satz formulieren:

**Satz:** Ist bei einer Ziehung "6 aus 49" ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge, die Grundmenge unterteilt in eine Teilmenge A von m "richtigen" Elementen und das Komplement B aus den restlichen 49 - m "falschen" Elementen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 6 gezogenen Zahlen genau i "richtig" sind, also aus A stammen, gleich

**p("genau i Richtige") =** $\binom{m}{i}\cdot\binom{49-m}{6-i}\ /\ \binom{49}{6}$

Derselbe Satz für eine Ziehung "k aus n" ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge lautet (man ersetze 49 durch n und 6 durch k):

**(2.3.4) Satz:** Ist bei einer Ziehung "k aus n" ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge, die Grundmenge unterteilt in eine Teilmenge A von m Elementen und das Komplement B aus den restlichen n - m Elementen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau i der k gezogenen Elemente aus A stammen (also Treffer sind), gleich

**p("genau i Treffer") =** $\binom{m}{i}\cdot\binom{n-m}{k-i}\ /\ \binom{n}{k}$

Und wie war es in Beispiel (2.3.1)? Unterteilung in Teilmengen {1} und {2,3,...,49}.
Also m = 1.

p(0 Treffer) = p(nein) = $\binom{1}{0}\cdot\binom{48}{6}\ /\ \binom{49}{6}$, p(1 Treffer) = p(ja) = $\binom{1}{1}\cdot\binom{48}{5}\ /\ \binom{49}{6}$.

Beispiel derselben Art:

**(2.3.5) Wieviele Möglichkeiten (mögliche Ergebnisse) gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie jeweils, wenn mich nur interessiert, wie viele der gezogenen Zahlen einstellig sind?**

**wieder 7 Möglichkeiten (keine, eine, zwei, drei, vier, fünf, alle sechs)**

Wahrscheinlichkeiten? Wieder dieselbe Formel, diesmal ist m = 9.
Jetzt zu etwas ganz anderem.

**(2.3.6) Wieviele Möglichkeiten (**mögliche Ergebnisse**) gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie jeweils, wenn mich interessiert**, **wieviele der gezogenen Zahlen einstellig sind, wie viele zwischen 10 und 19, wie viele zwischen 20 und 29, zwischen 30 und 39, zwischen 40 und 49 liegen?**

Das ist wirklich was Neues. Da macht es Schwierigkeiten, die "Möglichkeiten" hinzuschreiben. Das nächste Problem wird sein, sie abzuzählen, und dann noch, ihre Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Aber erst mal ein paar Beispiele, um sich dem Problem zu nähern.
Es könnte sein, daß alle sechs Zahlen einstellig sind.
Oder alle zwischen 40 und 49.
Oder zwei zwischen 20 und 29, eine zwischen 30 und 39 und der Rest zwischen 40 und 49.

Wie können wir diese "Möglichkeiten" aufschreiben? Irgendwie müssen diese "Boxen", in die die Grundmenge {1,2,...,49} unterteilt ist, mit der Anzahl der Zahlen, die aus ihnen stammen, erwähnt werden. Man könnte das erste Beispiel als (6,0,0,0,0) schreiben, das zweite als (0,0,0,0,6).
Das würde bedeuten: wir schreiben 5-Tupel aus Anzahlen; in die i-te Komponente schreiben wir die Anzahl der Zahlen aus der i-ten Box. Dann sähe das dritte Beispiel so aus: (0,0,2,1,3).
Und (1,1,1,1,2) würde bedeuten: eine einstellige Zahl, eine zwischen 10 und 19, eine zwischen 20 und 29, eine zwischen 30 und 39 und zwei zwischen 40 und 49.

**Offenbar liefern diese 5-Tupel aus Zahlen zwischen 0 und 6 genau unsere gesuchten Möglichkeiten - wenn die Summe der Zahlen gleich 6 ist. Es wurden ja genau 6 Zahlen gezogen.**

Wir haben also die "Möglichkeiten" im Griff, und wollen sie abzählen.
5-Tupel, wo in jeder Komponente 0,1,2,3,4,5 oder 6 stehen könnte - kann man da nicht einfach multiplizieren?
Leider dürfen wir **nicht** einfach 7 mal 7 mal 7 mal 7 mal 7 rechnen, weil dabei ganz viele unzulässige "Möglichkeiten" mitgezählt werden. Zum Beispiel (0,0,0,0,0), wo überhaupt keine Gewinnzahl vorläge. Oder (2,2,2,2,2), wo zehn Zahlen gezogen worden wären. Die Bedingung, daß es genau sechs Gewinnzahlen sind, macht da Einschränkungen.

Daher lieber eine Fallunterscheidung:
(i) sechs in derselben Box: 5 Möglichkeiten (6,0,0,0,0) etc.
(ii) fünf in derselben Box: 5 mal 4 Möglichkeiten (5,1,0,0,0) etc.
(iii) vier in derselben Box, die restlichen beiden auch: 5 mal 4 Mögl.: (4,2,0,0,0) etc.
(iv) vier in derselben Box, die restlichen beiden nicht: 5 mal $\binom{4}{2}$ Mögl.: (4,1,1,0,0) etc.

(v) drei in derselben Box, die restlichen drei auch: $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten (3,3,0,0,0) etc.

(vi) drei in derselben Box, zwei weitere auch: 5 mal 4 mal 3 Mögl.: (3,2,1,0,0) etc.

(vii) drei in derselben Box, keine weiteren: 5 mal $\binom{4}{3}$ Mögl.: (3,1,1,1,0) etc.

(viii) je zwei in derselben Box: $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten: (2,2,2,0,0) etc.

(ix) zweimal zwei in derselben Box: $\binom{5}{2}$ mal $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten: (2,2,1,1,0) etc.

(x) zwei in derselben, alle anderen einzeln: 5 Möglichkeiten: (2,1,1,1,1) etc.

Das ergibt zusammen 5 + 20 + 20 + 30 + 10 + 60 + 20 + 10 + 30 + 5 = 210 Möglichkeiten.

Sieht kompliziert aus.
Ich will die Aufgabe hier nicht auswalzen, aber sie sollten erkennen:
- bei Nebenbedingungen an Tupel darf man erstmal gar nicht multiplizieren
- durch eine Fallunterscheidung kann man meist doch wieder auf Multiplikationen kommen.

Wahrscheinlich fällt Ihnen an der Anzahl 210 der Möglichkeiten nichts auf, aber ich sage es Ihnen: $210 = \binom{10}{6}$. Sollte diese Anzahl, die
bei einer Ziehung "6 aus 10", ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge, oder
bei einer Ziehung "6 aus 5", mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge
als Zahl der sämtlichen Möglichkeiten herausgekommen wäre, uns zu denken geben?
Wäre eine andere Modellierung hier hilfreich?

Nun, zehn Objekte sehe ich weit und breit nicht, also scheint die erste Interpretation nichts zu bringen. Aber 5 - das könnten doch durchaus die Boxen sein.
Vergessen wir also die Nummern auf den einzelnen Kugeln und merken uns nur, aus welcher Box sie stammen. Dann ziehen wir sechs mal, und ziehen jeweils eine Box!
Da dieselbe Box auch mehrfach "gezogen" werden kann (es sind ja auch beim fünften und sechsten Zug noch aus jeder Box Kugeln da), ist es mit Zurücklegen.
Es ist also tatsächlich interpretierbar als Ziehung "6 aus 5", mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge. Und da gibt es $\binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6}$ Möglichkeiten.

**Und wie schreiben wir die Möglichkeiten auf?**
Dazu müssen die Boxen Namen bekommen, damit wir sie hinschreiben können! Eigentlich würde ich den Boxen gerne Buchstaben als Namen geben, weil die Zahlen 1, 2, ... ja schon
- als Zahlen, die gezogen werden,
- als Anzahlen von Zahlen in einer Box

auftreten.
Aber aus gutem Grund nehme ich doch wieder Zahlen für die Boxen. Nennen wir sie 1, 2, 3, 4, und 5.
**Als 6-Kombinationen mit Wiederholungen, d.h. als Mengen von 6 nicht notwendig verschiedenen Elementen aus {1, 2, 3, 4, 5}.**

Dann ist die Möglichkeit (6,0,0,0,0) von eben jetzt die Möglichkeit {1,1,1,1,1,1,1}. Und die Möglichkeit (2,2,1,0,1) von eben ist jetzt {1,1,2,2,3,5}.
Wie hätten wir {3,3,3,3,4,5} vorhin geschrieben? Klar: (0,0,4,1,1).

**Satz:** Es gibt genauso viele 5-Tupel von Zahlen aus {0,1,2,3,4,5,6}, deren Summe 6 ergibt, wie Mengen von sechs nicht notwendig verschiedenen Elementen aus {1,2,3,4,5}.

*Beweis:* Zu jeder Menge $\{a_1, a_2, ..., a_6\}$ von sechs nicht notwendig verschiedenen Elementen aus {1,2,3,4,5}bilde ich ein 5-Tupel von Zahlen wie folgt: in die i-te Komponente schreibe ich die Anzahl der $a_k$, die gleich i sind. Natürlich sind die Zahlen in den Komponenten aus {0,1,2,3,4,5,6}. Und natürlich addieren sie sich zu 6 auf, da in meiner Menge ja genau sechs Zahlen $a_k$ vorkommen. Verschiedene Mengen müssen von mindestens einer Sorte $a_k$ = 1, 2, 3, 4, oder 5 eine verschiedene Anzahl haben, also unterscheiden sich auch die zugehörigen 5-Tupel (an mindestens einer Stelle). Die Zuordnung ist also injektiv (eineindeutig). Jedes der genannten 5-Tupel ist aber auch irgendeiner Menge zugeordnet, denn man kann sie aus dem 5-Tupel ja rekonstruieren. Dazu nehme man die Anzahlen in den Komponenten als "Rezept", wieviele Zahlen jeder Sorte man in die Menge aufnehmen soll.
Die Zuordnung ist also auch surjektiv (auf), und daher bijektiv.
Die beiden Mengen haben daher gleichviele Elemente.

Finden wir die Verallgemeinerung dieses Satzes?
**6 aus 5** mit Zurücklegen ohne Reihenfolge wird zu **k aus n** mit Zurücklegen ohne Reihenfolge.
Das Pendant zu **Mengen von k nicht notwendig verschiedenen Elementen aus {1,2,...,n}** bilden wohl **n-Tupel von Zahlen aus {0,1,...,k}, deren Summe k ergibt**.

**(2.3.7) Satz:** Es gibt genauso viele n-Tupel von Zahlen aus {0,1, ..., k}, deren Summe k ergibt, wie Mengen von k nicht notwendig verschiedenen Elementen aus {1, 2, ..., n}.

Aber: wie kann man diese Mengen mit mehrfachen Elementen, diese Kombinationen mit Wiederholungen zählen?
Es soll laut Tabelle ja $\binom{n+k-1}{k}$ herauskommen. Aber das ist eigentlich eine Anzahl von Kombinationen ohne Wiederholungen!
Man müßte die Wiederholungen loswerden. Zum Beispiel, indem man die sämtlichen k-Kombinationen mit Wiederholungen aus n Elementen mit den sämtlichen k-Kombinationen ohne Wiederholungen aus n+k-1 Elementen identifiziert.

Das werden wir jetzt tun (für k = 6, n = 5), und zwar so:

Ich gebe ein **Verfahren** an, das diese **Identifizierung** liefert.

(1) Mengen von sechs nicht notwendig verschiedenen Zahlen aus {1,2,3,4,5} schreiben wir stets der Größe nach geordnet auf.

(2) Ich erhöhe die erste Zahl um 0, die zweite um 1, die dritte um 2, die vierte um 3, die fünfte um 4, die sechste um 5. Das liefert eine Abbildung $\alpha$:
$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \to \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} := \{a_1+0, a_2+1, a_3+2, a_4+3\ a_5+4, a_6+5\}$
So wird aus einer Menge von sechs Zahlen wieder eine Menge von sechs Zahlen.
Aber darüberhinaus verschwinden alle Mehrfachnennungen! Denn aus
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6$ folgt sicher $a_1+0 < a_2+1 < a_3+2 < a_4+3 < a_5+4 < a_6+5$
Also gilt $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$, und daher sind die Mengen $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ stets Mengen von lauter verschiedenen Elementen. Allerdings kommen da auch die Zahlen 6, 7, 8, 9, und 10 vor. Und weiterhin die Zahlen 1 2, 3, 4, und 5.

Wie oben beim letzten Satz haben wir auch hier eine Zuordnung, eine Abbildung erklärt, die schlecht zu zählende Objekte mit leichter zu zählenden Objekten identifiziert.
Von dieser Abbildung muß man aber noch zeigen, daß sie bijektiv ist. Erst dann weiß man, daß es von beiden Sorten Objekten gleichviele gibt.

Nennen wir die oben erklärte Abbildung wie gesagt $\alpha$. Sie ordnet Mengen von sechs Zahlen wieder je eine Menge von sechs Zahlen zu.
Was ist aber genau der **Definitionsbereich von $\alpha$**? Welche Mengen wollen wir durch $\alpha$ mit etwas anderem identifizieren?
**Die Gesamtheit (Menge) aller Mengen von 6 nicht notwendig verschiedenen Elementen aus {1,2,3,4,5}.**
Was ist der **Zielbereich von $\alpha$**? Mit welchen Mengen wollen wir diese "schwierigen Mengen" durch $\alpha$ identifizieren?
**Die Gesamtheit (Menge) aller Mengen von 6 verschiedenen Elementen aus {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.**

Ist die Abbildung $\alpha$ **injektiv**?
Klar, wenn sich eine Menge als Bild von zwei Mengen erscheint,
$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{a_1+0, a_2+1, a_3+2, a_4+3\ a_5+4, a_6+5\} =$
$= \{a_1'+0, a_2'+1, a_3'+2, a_4'+3\ a_5'+4, a_6'+5\}$
so sehen wir unmittelbar, dass die beiden Mengen gleich sein müssen.
Ist die Abbildung $\alpha$ **surjektiv**?
Das heißt: Ist der **Zielbereich von $\alpha$** gleichzeitig auch der **Wertebereich von $\alpha$**? Dazu müßten wir zu einer beliebigen 6-er Menge $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ von verschiedenen Zahlen aus $\{1,2,...,10\}$ ein Urbild unter $\alpha$ finden.
Offenbar wird die Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{b_1-0, b_2-1, b_3-2, b_4-3, b_5-4, b_6-5\}$ unter $\alpha$ auf $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{(b_1-0)+0, (b_2-1)+1, (b_3-2)+2, (b_4-3)+3, (b_5-4)+4, (b_6-5)+5\}$ abgebildet.
Und es gilt: $a_1 = b_1-0 \geq 1$,
für alle i gilt: $a_i = b_i-(i-1) \leq b_{i+1}-i = a_{i+1}$
und schließlich gilt: $a_6 = b_6-5 \leq 10-5 = 5$.
Also ist die Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ aus dem Definitionsbereich von $\alpha$.

Wir haben also gesehen, dass die Abbildung $\alpha$ bijektiv ist, und daher die beiden betrachteten Mengen gleichviele Elemente haben.

Aber wir haben ja sogar die Umkehrabbildung $\alpha^{-1}$ von $\alpha$ ausgerechnet:
$\alpha^{-1}(\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}) = \{b_1-0, b_2-1, b_3-2, b_4-3, b_5-4, b_6-5\}$.
Der Beweis ist fertig.

Es war der Beweis zu folgendem Satz:

**Satz:** Es gibt genau $\binom{5+6-1}{6}$ Mengen von sechs nicht notwendig verschiedenen Elementen aus der Menge {1,2,3,4,5}.

Und der gleiche Beweis zeigt auch:

**(2.3.8) Satz:** Es gibt genau $\binom{n+k-1}{k}$ Mengen von k nicht notwendig verschiedenen Elementen aus der Menge {1,2,...,n}.

Das war die Formel für die Anzahl Möglichkeiten in der "unsympathischen" Variante (mit Zurücklegen/ohne Reihenfolge) der Ziehung "k aus n".

Bevor wir das Beispiel weiter diskutieren nur noch schnell eine weitere Anwendung der Abbildung $\alpha$ bzw. $\alpha^{-1}$. Der Einfachheit halber für die Ziehung "6 aus 49".
$\alpha^{-1}$ identifiziert ja unsere Ergebnisse, also die 6-er Mengen aus {1,2,...,49} mit den Mengen von sechs nicht notwendig verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,44}. Welche Ergebnisse entsprechen dabei den gewöhnlichen 6-er Mengen aus {1,2,...,44}, die lauter verschiedene Zahlen enthalten?
Wie man sieht, gehört {1,2,3,4,5,6} nicht dazu. Bei der "Verschiebung" werden zwei aufeinanderfolgende Zahlen auf dieselbe Zahl geschoben und liefern Wiederholungen.
Wenn man jedoch in der 6-er Menge keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen hat, passiert das nie, und man bekommt die gewöhnlichen 6-er Mengen aus {1,2,...,44}.
$\alpha^{-1}$ identifiziert also die $\binom{44}{6}$ gewöhnlichen 6-er Mengen aus {1,2,...,44} mit denjenigen 6-er Mengen aus {1,2,...,49}, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

**(2.3.9)** Interessieren wir uns also für das Ereignis:
A = "unter den Gewinnzahlen sind **keine zwei aufeinanderfolgenden** Zahlen", so gilt:

$$p(A) = \binom{44}{6} / \binom{49}{6} = (44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40\cdot 39)/(49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44) \approx 0{,}5$$

Umgekehrt ist dann aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen gezogen werden, (das Gegenereignis zu A) etwa 50%.

Zurück zu unseren fünf Boxen und den 210 Möglichkeiten, wie die Zahlen verteilt sein können.

Wir sollten ja noch klären, wie wahrscheinlich die einzelnen Möglichkeiten sind.
Zum Beispiel die Möglichkeit (6,0,0,0,0), daß alle sechs Zahlen einstellig sind. Haben wir längst (in (d)) diskutiert! p( (6,0,0,0,0) ) = $= \binom{9}{6} \cdot \binom{40}{0} / \binom{49}{6}$.

Oder (2,2,1,1,0), daß von den sechs Zahlen
- 2 aus der ersten Box
- 2 aus der zweiten Box
- 1 aus der dritten Box
- 1 aus der vierten Box
- 0 aus der fünften Box

stammen. Da ist die Einteilung der Grundmenge in zwei Boxen (einstellig/zweistellig) auf fünf Boxen verfeinert worden. Aber vielleicht funktioniert ja der alte "Trick" noch, die Gewinnzahlen in Paare oder sogar 5-Tupel von Mengen überzuführen.
Wir könnten zum Beispiel die Gewinnzahlen {1,7,11,15,28,37} schreiben als

$$( \{1,7\}, \{11,15\}, \{28\}, \{37\}, \emptyset ).$$

Da haben wir in die i-te Komponente des 5-Tupels den Teil der Gewinnzahlen geschrieben, der in der i-ten Box liegt. Das geht eindeutig, und die Tupel kann man wieder multiplikativ abzählen, wenn man weiß, wieviele (d.h. welche) Mengen man in jede Komponente schreiben darf.
Bei unserer Möglichkeit (2,2,1,1,0) der Verteilung auf Boxen sind das:
alle 2-elementigen Teilmengen von {1,2,...,9} in die erste Komponente,
alle 2-elementigen Teilmengen von {10,11,...,19} in die zweite Komponente,
alle 1-elementigen Teilmengen von {20,21,...,29} in die dritte Komponente,
alle 1-elementigen Teilmengen von {30,31,...,39} in die vierte Komponente,
alle 0-elementigen Teilmengen von {40,41,...,49} in die fünfte Komponente,
Es gibt also $\binom{9}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{0}$ Möglichkeiten, und die Wahrscheinlichkeit der Verteilung (2,2,1,1,0) ist daher gleich $\binom{9}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{0} / \binom{49}{6} \approx 0{,}0125$.

Analog berechnet man die Wahrscheinlichkeit der übrigen "Möglichkeiten", und es ergibt sich zum Beispiel:

$$p( (1,1,1,1,2) ) = \binom{9}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{2} / \binom{49}{6} \approx 0{,}031.$$

Wir formulieren den dahinterstehenden Satz, den wir "praktisch bewiesen " (die Beweismethode am Beispiel vorgeführt) haben.

**(2.3.10) Satz:** Sei eine Grundmenge mit n Elementen gegeben, die in t Teile der Mächtigkeiten $m_1, m_2, \ldots, m_t$ zerlegt ist. Dann gibt es genau $\binom{m_1}{k_1} \cdot \binom{m_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{m_t}{k_t}$ Möglichkeiten, k Elemente derart aus der Grundmenge auszuwählen, daß genau $k_i$ Stück davon aus der i-ten Teilmenge stammen.
Betrachtet man eine Ziehung "k aus n" ohne Zurücklegen (und ohne Reihenfolge). Sei die Grundmenge wie eben in Teilmengen zerlegt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für die Verteilung $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ der k Kugeln auf die Teile genau $\binom{m_1}{k_1} \cdot \binom{m_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{m_t}{k_t} \Big/ \binom{n}{k}$.

Die Formulierung dieses Problems in den Lehrbüchern lautet meist wie folgt.
"In einer Urne befinden sich 5 rote, zwei grüne und drei blaue Kugeln. Hans greift blind hinein und zieht drei Kugeln heraus. Wie wahrscheinlich ist es, daß er je eine Kugel der drei Farben gezogen hat?"

Die Antwort lautet (für mich erstaunlich hoch): $\binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \Big/ \binom{10}{3} \approx 0{,}25$.

Bei der Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten, die sechs Gewinnzahlen auf die fünf Boxen zu verteilen, könnte ich mir vorstellen, dass der eine oder andere von Ihnen sagt: "Für mich gibt es nur zehn Möglichkeiten!"

Ganz verkehrt wäre das auch nicht: es sind Möglichkeiten für den Ausgang der Ziehung.
Sie erfüllen unsere Anforderung, dass bei jeder Durchführung der Ziehung genau eine dieser Möglichkeiten auftritt.
Aber es sind nicht die Möglichkeiten, nach denen gefragt ist.

Also:

**konkret fragen – konkret antworten – erst dann überlegen**.

Zur Probe zwei letzte Lotto-Fragen.

**(2.3.11) Wieviele Möglichkeiten (**mögliche Ergebnisse**) gibt es, und wie wahrscheinlich sind sie jeweils, wenn mich nur interessiert, welche meiner 6 getippten Zahlen gezogen werden?**

Es könnte sein, daß gar keine meiner Zahlen kommt. Oder alle. Oder die 2, die 5 und die 6. Oder nur die 1. Ich muß, um an die Möglichkeiten zu kommen, die sämtlichen möglichen Antworten auf die Frage finden: "Welche meiner Zahlen kommen?"
Und die Antwort irgendwie "mathematisch" hinschreiben, um die Antworten (Möglichkeiten) leicht zählen zu können.

Eine Antwort muß die "gekommenen" meiner Zahlen beinhalten, aber ich bin nicht aufgefordert etwas über ihre Reihenfolge zu sagen. Eine Antwort besteht also aus einer Menge von Zahlen aus {1,2,3,4,5,6}.
Erinnern wir uns, mein Tipp war ja {1,2,3,4,5,6}.
Gibt es irgendwelche Einschränkungen, oder sind alle Teilmengen von {1,2,3,4,5,6} mögliche Antworten?
Offenbar sind alle Teilmengen möglich, d.h. ich muß zählen, wieviele Teilmengen eine 6-elementige Menge hat.

**Satz:** {1,2,3,4,5,6} hat genau $2^6 = 64$ Teilmengen.

Das werden wir im Kombinatorik-Kapitel auf mehrere Arten beweisen. Hier ein Beweis, der zu unseren Ziehungen passt.

Die Formel sieht nach $2^6 = n^k$ aus. Das war aber die Anzahl aller 6-Tupel von Elementen aus einer Menge mit 2 Elementen.
Können wir Teilmengen A von {1,2,...,6} mit 6-Tupeln von Elementen aus einer bestimmten (noch nicht bekannten) Menge mit 2 Elementen (z.B. Symbolen) eineindeutig identifizieren?
Na klar: in die i-te Komponente schreiben wir eine 1, wenn das Element i in der Menge A liegt, eine 0, wenn i nicht in A liegt.
Dann entspricht die Menge {1, 5, 6} dem Tupel (1, 0, 0, 0, 1, 1}, der leeren Menge das Tupel (0, 0, 0, 0, 0, 0) und der ganzen Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6} das Tupel (1, 1, 1, 1, 1, 1).
Offenbar ist die Zuordnung bijektiv, man kann dem Tupel komponentenweise ablesen, welche Elemente zu der entsprechenden Menge gehören.

Offenbar gibt es nach der Multiplikationsformel $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ 6-Tupel, die in den Komponenten 1 oder 0 stehen haben, also ist die Behauptung bewiesen.

Mit derselben Idee beweist man natürlich ebenso den allgemeinen

**(2.3.12) Satz:** {1,2,...,n} hat genau $2^n$ Teilmengen.

Weiter im Text (es interessieren die Möglichkeiten, welche meiner Zahlen gezogen werden).

**Welche Wahrscheinlichkeit** haben nun die Möglichkeiten (zum Berechnen nehmen wir die üblichen 6-er Mengen, die das Gerät zieht, unsere getippten Zahlen seien der Einfachheit halber die Zahlen von 1 bis 6)?

- "alle", also {1,2,3,4,5,6}? dieselbe wie "sechs Richtige".
- {1,2,3,4,5}, also dass genau die ersten fünf meiner Zahlen gezogen wurden?
  Einteilung von {1,2,...,49} in {1,2,3,4,5}, {6}, {7,8,...,49}: $\binom{5}{5} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{43}{1} \,/\, \binom{49}{6}$
- "nur die 4 und die 6", also {4,6}?
  Einteilung von {1,2,...,49} in {4,6}, {1,2,3,5}, {7,8,...,49}: $\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{43}{4} \,/\, \binom{49}{6}$
- "nur nicht die 2 und die 5", also {1, 3, 5, 6}?

Einteilung von {1,2,...,49} in {2,5}, {1,3,4,6}, {7,8,...,49}: $\binom{2}{0}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{43}{2}\ /\ \binom{49}{6}$

- "gar keine", also ∅? dieselbe wie "0 Richtige".

Es scheint, daß alle 2-elementigen Teilmengen meines Tipps alle dieselbe Chance, nämlich die Wahrscheinlichkeit **Fehler! Textmarke nicht definiert.** $\binom{4}{0}\cdot\binom{43}{4}\ /\ \binom{49}{6}$ haben, die einzigen Richtigen meines Tipps zu sein. Und ist auch so. Und davon gibt es $\binom{6}{2}$ Stück.

Und ihre Chancen zusammengenommen ergeben wieder meine Chance "auf genau 2 Richtige" (siehe (b)):

$$p(\text{genau 2 Richtige}) = \binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}\ /\ \binom{49}{6}$$

**(2.3.13) Jetzt fehlt eigentlich nur noch die Chance auf eine Fünf mit Zusatzzahl**.

Auch die wollen wir berechnen. Wir wollen es zumindest versuchen. Es geht um das Ereignis
A = "Ich habe 5 Richtige und die Zusatzzahl."
Verwenden wir die verschiedenen Sichtweisen.

**1. Versuch:**
Ich habe meinen Tippschein mit meinem Tipp {1,2,3,4,5,6} vorliegen und beobachte die Ziehung. Mich interessieren nur die Gewinnzahlen. Nachdem die sechste Kugel gefallen ist, gehe ich Bierholen. Ich verpasse die siebte Zahl. Ergebnisse der Ziehung sind für mich die 6-Tupel oder auch die 6-er Mengen (= Gewinnzahlen).
Dann kann ich zwar bei manchen Ergebnissen feststellen, daß sie ungünstig für das Ereignis A = "Ich habe 5 Richtige und die Zusatzzahl." sind, aber wenn genau 5 Richtige zu sehen sind, weiß ich nicht, ob nun die Zusatzzahl stimmt oder nicht, ob das Ergebnis günstig oder ungünstig für A ist.
**Leider kann ich die Wahrscheinlichkeit von A so nicht berechnen**.

**2. Versuch:**
Ich habe meinen Tippschein mit meinem Tipp {1,2,3,4,5,6} vorliegen und beobachte die Ziehung. Mich interessieren die erste Zahl bis zur siebten Zahl. Ergebnisse der Ziehung sind für mich die 7-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,49}.
Günstig für A sind diejenigen Tupel, von denen unter den ersten 6 Zahlen fünf "meiner Zahlen" vorkommen, und die siebte Zahl auch noch eine meiner Tipp-Zahlen {1,2,3,4,5,6} ist.
Je nachdem, wann die "falsche" Zahl kam (als erste, zweite,..., sechste) gibt es **6 Fälle**.
Zum Beispiel, wenn die erste Zahl falsch war:
dann gibt es 43 Möglichkeiten für die erste Zahl, die ja aus {7,...,49} sein soll,

6 Möglichkeiten für die zweite Zahl, die ja aus {1,2,..,6} sein soll, 5 Möglichkeiten für die dritte Zahl, die aus {1,2,..,6}, aber verschieden von der zweiten sein soll, 4 Möglichkeiten für die vierte Zahl, die aus {1,2,..,6}, aber verschieden von der zweiten und dritten sein soll, 3 Möglichkeiten für die fünfte Zahl, die aus {1,2,..,6}, aber verschieden von der zweiten bis zur vierten sein soll, 2 Möglichkeiten für die sechste Zahl, die aus {1,2,..,6}, aber verschieden von der zweiten bis zur fünften sein soll, 1 Möglichkeit für die siebte Zahl, die aus {1,2,..,6}, aber verschieden von der zweiten bis zur sechsten sein soll -
also insgesamt $43 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 43 \cdot 6!$ Möglichkeiten in dem Fall, dass die erste Zahl falsch war.
Wenn die zweite Zahl falsch ist, erhält man $6 \cdot 43 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 43 \cdot 6!$ Möglichkeiten, wenn die dritte falsch war $6 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 43 \cdot 6!$ Möglichkeiten, letztlich jedem der sechs Fälle, egal die wievielte Zahl falsch war, stets genau $43 \cdot 6!$ Möglichkeiten.

Also gilt $p(A) = (6 \cdot 43 \cdot 6!)/49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = (6 \cdot 6!)/49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 6/\binom{49}{6}$.

**3. Versuch:**
Ich habe das Ergebnis der Ziehung, also die sechs Gewinnzahlen und die Zusatzzahl, vorliegen, und möchte wissen, ob mein Tipp eine "Fünf mit Zusatzzahl" gebracht hat.
Ergebnisse des Experiments sind für mich die möglichen Tipps, die ich hätte abgeben können, also die 6-er Mengen von verschiedenen Zahlen aus {1,2,...,49}.
Günstig für A sind diejenigen 6-er Mengen, die fünf der sechs Gewinnzahlen und die Zusatzzahl enthalten.
Einteilung {1,2,....,49} in {6 Gewinnzahlen}, {Zusatzzahl}, {ganz falsche Zahlen} liefert:

$$p(A) = \binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{42}{0} \Big/ \binom{49}{6} = 6 \Big/ \binom{49}{6}.$$

Zwei Schluss-Bemerkungen zum Thema Lotto:
(1) Schauen Sie mal in die Zeitung, wenn die Gewinnklassen mit den Gewinnen aufgelistet sind. Welche Gewinnklasse haben wir noch nicht erwähnt?
Die "4 mit Zusatzzahl", die es seit Neuestem gibt? Auf einem Übungsblatt rechnen Sie die Chance auf eine "4 mit Zusatzzahl" aus.
(2) Welche anderen "Lotto-Arten" gibt es noch? Die Auswahlwette "6 aus 45".

Aber nun weiter im Text.
Gibt es (außer dem gewöhnlichen Zahlenlotto "6 aus 49") weitere Standard-Beispiele im täglichen Leben (oder in Klausuraufgaben), bei denen Ziehungen "k aus n" vorkommen?

## (2.4) Das Ziehen von Karten aus einem (gut gemischten) Kartendeck.

Meist handelt es sich um ein französisches Blatt, mit dem etwa Skat gespielt wird, bzw. um ein deutsches Blatt (etwa für "Schafkopf" oder in doppelter Ausfertigung für "Doppelkopf") - oder auch ein Blatt, mit dem man Bridge (oder auch Rommee oder Canasta) spielen kann.
Gemeinsam ist allen, daß es **vier Spielfarben** gibt, und die Karten außer der Farbe auch noch gewisse **Bilder** oder auch Zahlen (den Kartenwert) zeigen. Geknüpft an das Bild ist der Wert (die **Augenzahl**) der entsprechenden Karte.
Die Namen der Spielfarben im Spiel Skat (in Klammern einige Namen derselben Farbe in anderen Kartenspielen wie Schafkopf oder Bridge) sind Karo (Schellen), Herz (Coeur), Pik (= Grün) und Kreuz (= Eicheln, Treff), und bei Karo und Herz handelt es sich um "rote Farben", bei Pik und Kreuz um "schwarze Farben".
An Bildern gibt es das As (A, 11 Augen), den König (K, 4 Augen), die Dame bzw. den Ober (D, Q, O, 3 Augen) und den Jungen bzw. Bube oder Unter (J, B, U, 2 Augen), die Zahlen reichen von der 2 bis zur 10, wobei lediglich die Zehn einen von Null verschiedenen Wert hat, nämlich 10 Augen.

Je nach Kartenspiel wird mit einer bestimmten Menge von Karten gespielt.
Beim Bridge mit allen 52, bei Skat oder Schafkopf mit 32 (7 bis As), bei Tarock mit 36 Karten (6 bis As), bei einem "Kurzen Schafkopf" oder bei "66" mit 24 (9 bis As) – und bei Doppelkopf mit einem doppelten Schafkopfblatt.
Je nach Spiel variiert die Spielerzahl von 2 ("66") über 3 (Skat, Tarock) bis 4 (Schafkopf, Bridge). Ziel eines Spiels ist, mehr als die Hälfte aller erreichbaren Augen (also etwa 61 bei Skat und Schafkopf) oder mindestens eine bestimmte, vorher durch eine "Reizung", einen "Bietprozess" ausgehandelte Anzahl von Stichen (Bridge) zu machen.
Aber so genau wollen wir gar nicht darauf eingehen. Uns interessiert hier mehr die kombinatorische Seite der Kartenspiele.

Beim **Skat** wird also mit 32 Karten gespielt, in den vier Farben jeweils die Kartenwerte 7, 8, 9, 10, J, D, K und A.
Jeder Spieler erhält zehn Karten, die beiden übrigen Karten werden als "Skat" (bzw. "Stock") verdeckt auf den Tisch gelegt.
Wenn tatsächlich ordentlich gemischt wurde, kann man die Hand (das Blatt), das jeder Spieler erhält, als zufällig ansehen, es handelt sich, wenn ein Spieler die ihm ausgeteilten zehn Karten aufnimmt, also um eine Ziehung **"10 aus 32"**, natürlich **ohne Zurücklegen**, und üblicherweise auch ohne Reihenfolge (beim Aufstecken macht jeder Spieler die Reihenfolge der Karten, in der er sie aufgenommen hat, wieder "kaputt" und ordnet sie in einer bestimmten, ihm angenehmen Form an).
Man könnte die Karten auch einzeln nacheinander aufnehmen, und die Reihenfolge berücksichtigen, das wird aber üblicherweise nicht getan:
erstens wird meist nicht nach Ereignissen gefragt, die etwas mit der Reihenfolge der aufgenommenen Karten zu tun hat,
zweitens sind bei einer Ziehung ohne Zurücklegen sowohl die Möglichkeiten mit Reihenfolge als auch die Möglichkeiten ohne Reihenfolge untereinander gleichwahrscheinlich, können also für die Laplace-Formel hergenommen werden, man braucht dafür die Reihenfolge nicht.

Üblicherweise sind hier also die **Mengen von zehn Karten** (Blätter) die sämtlichen Möglichkeiten, die man zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten hernimmt. Und es sind natürlich $\binom{32}{10}$ Stück. Wie groß ist etwa diese Anzahl von Möglichkeiten?

$$\binom{32}{10} \approx 64{,}5 \text{ Millionen.}$$

Das ermöglicht uns bereits die Wahrscheinlichkeit bestimmter naheliegender Ereignisse zu bestimmen:

Die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Blatt zu erhalten, ist genau $1 / \binom{32}{10} \approx 1 : 64{,}5$ Mio.

Denn, vorgegeben ein bestimmtes Blatt, ist nur eine einzige der Möglichkeiten günstig für dieses Ereignis, nämlich die Menge der zehn vorgegebenen Karten.

[Übrigens: das Ereignis A, bei zweimaligem Verteilen der Karten zweimal dasselbe Blatt zu erhalten, hat ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $1 / \binom{32}{10} = \binom{32}{10} / \binom{32}{10}\binom{32}{10}$; hier sind die Paare von zwei Blättern die sämtlichen (gleichwahrscheinlichen, falls dazwischen wieder gemischt wird) Möglichkeiten, es gibt $\binom{32}{10}\binom{32}{10}$ davon, aber nun sind $\binom{32}{10}$ davon, nämlich die Paare von zwei gleichen Blättern, günstig für das Ereignis A.
Das sollte Sie an das Würfeln erinnern: bei einem Wurf eine Sechs zu würfeln ist genauso wahrscheinlich wie bei zwei Würfen einen Pasch zu erzielen!
Zweimal nacheinander (bei zwei Versuchen) dasselbe Blatt zu erhalten, ist also noch fünfmal unwahrscheinlicher als eine Sechs beim Lotto. ]

**Wenn mich nur interessiert, ob** ich ein bestimmtes Blatt habe, gibt es also **genau zwei Möglichkeiten;**
**"ja"** mit Wahrscheinlichkeit $p = 1 / \binom{32}{10}$, und **"nein"** mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.
Nennen wir den Fall "ja" einen "Erfolg", so haben wir **Erfolgswahrscheinlichkeit p** und Mißerfolgswahrscheinlichkeit 1-p.

Wieder könnten uns weitere Dinge interessieren, als nur diese Frage.

**(2.4.1) Frage:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich nur interessiert, wieviele Herzkarten ich habe?
**Antwort:** Die Möglichkeiten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 - also neun Möglichkeiten.

Und die Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle (Ereignisse)?

$$p(0) = \binom{8}{0}\binom{24}{10} / \binom{32}{10} = 0{,}0304, \quad p(1) = \binom{8}{1}\binom{24}{9} / \binom{32}{10} = 0{,}1621,$$

$$p(2) = \binom{8}{2}\binom{24}{8} / \binom{32}{10} = 0{,}3192, \quad p(3) = \binom{8}{3}\binom{24}{7} / \binom{32}{10} = 0{,}3004,$$

$$p(4) = \binom{8}{4}\binom{24}{6} / \binom{32}{10} = 0{,}1460, \quad p(5) = \binom{8}{5}\binom{24}{5} / \binom{32}{10} = 0{,}0368,$$

$$p(6) = \binom{8}{6}\binom{24}{4} / \binom{32}{10} = 0{,}0046, \quad p(7) = \binom{8}{7}\binom{24}{3} / \binom{32}{10} = 0{,}0002,$$

$$p(8) = \binom{8}{8}\binom{24}{2} / \binom{32}{10} < 0{,}0001.$$

Das ist wieder die Unterteilung der 32 Karten in 8 Herzkarten und 24 Nichtherzkarten, und von den 10 "gezogenen" Karten sollen genau i Stück aus dem 8-er Teil sein.

**(2.4.2) Frage:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich nur interessiert, wieviele Asse ich habe?
**Antwort:** Die Möglichkeiten 0, 1, 2, 3, 4 - also fünf Möglichkeiten.

Und die Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle (Ereignisse)?

$$p(0) = \binom{4}{0}\binom{28}{10} / \binom{32}{10} = 0{,}2034$$

$$p(1) = \binom{4}{1}\binom{28}{9} / \binom{32}{10} = 0{,}4282$$

$$p(2) = \binom{4}{2}\binom{28}{8} / \binom{32}{10} = 0{,}2890$$

$$p(3) = \binom{4}{3}\binom{28}{7} / \binom{32}{10} = 0{,}0734$$

$$p(4) = \binom{4}{4}\binom{28}{6} / \binom{32}{10} = 0{,}0058$$

**(2.4.3) Frage:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich interessiert, wieviele Herzkarten **und** wieviele Pikkarten ich habe?
**Antwort:** 60 Möglichkeiten.

Wie sehen die denn aus, und wie kann ich sie zählen?
Da muß ich für jede Möglichkeit die Zahl der Herzkarten und die Zahl der Pikkarten angeben. Damit ich sie nicht durcheinanderbringe, wieder als Zahlenpaar (i,j), wobei i die Anzahl der Herzkarten, j die Anzahl der Pikkarten angibt. Für das i habe ich die Möglichkeiten 0, 1, 2, ..., 8, ebenso für das j. Allerdings kommen einige der denkbaren Zahlenpaare nicht vor, z.B. (6,7) kommt nicht vor, denn dann hätte man ja 13 Karten.
**Die Möglichkeiten hier sind also die Paare (i,j) mit i+j ≤ 10.**
Und die kann man etwa zählen, sortiert nach den Möglichkeiten für i:
i = 0: 9 Möglichkeiten für j, also für die Paare (0,j)
i = 1: 9 Möglichkeiten für j, also für die Paare (1,j)
i = 2: 9 Möglichkeiten für j, also für die Paare (2,j)
i = 3: 8 Möglichkeiten für j, also für die Paare (3,j)
i = 4: 7 Möglichkeiten für j, also für die Paare (4,j)
i = 5: 6 Möglichkeiten für j, also für die Paare (5,j)
i = 6: 5 Möglichkeiten für j, also für die Paare (6,j)
i = 7: 4 Möglichkeiten für j, also für die Paare (7,j)
i = 8: 3 Möglichkeiten für j, also für die Paare (8,j)

Leider hat jedes i eine verschiedene Anzahl von passenden j's, sodaß man die Gesamtzahl nicht durch eine Multiplikation herausbekommen kann. Man muß die Einzelanzahlen der verschiedenen Fälle aufaddieren.
Zusammen sind das also 9 + 9 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = **60 Möglichkeiten.**
Oder man zählt alle denkbaren Paare (i,j), $0 \le i,j \le 8$, und entfernt anschließend wieder diejenigen, die nicht auftreten können: Nun gibt es offenbar $81 = 9 \cdot 9$ denkbare Paare, und wegwerfen muß man diejenigen Paare (i,j) mit i+j > 10. Das sind
(8,8), (8,7), (8,6), (8,5), (8,4), (8,3),
(7,8), (7,7), (7,6), (7,5), (7,4),
(6,8), (6,7), (6,6), (6,5),
(5,8), (5,7), (5,6),
(4,8), (4,7),
(3,8).
Das sind 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21, und wir erhalten wieder 81 **-** 21 = 60 Möglichkeiten.
Und wie wahrscheinlich sind diese Möglichkeiten?

$$p(\,(i,j)\,) = \binom{8}{i}\binom{8}{j}\binom{16}{10-i-j} \;/\; \binom{32}{10}.$$

Denn da nehme ich wieder die $\binom{32}{10}$ Blätter (Mengen von 10 Karten) her und schaue, wieviele davon günstig sind, genau i Herzkarten und genau j Pikkarten zu enthalten. und das sind genau $\binom{8}{i}\binom{8}{j}\binom{16}{10-i-j}$ Stück. Dazu haben wir die 32 Karten in 8 Herzkarten, 8 Pikkarten und 16 übrige Karten eingeteilt und die Formel von weiter oben benutzt.

**(2.4.4) Frage:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich nur interessiert, ob ich mehr Herzkarten als Pikkarten habe?
**Antwort:** Die Möglichkeiten "ja" oder "nein", "Erfolg" oder "Mißerfolg" - also zwei Möglichkeiten.

Und die Wahrscheinlichkeit dieses "Erfolges" ist ...?
Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn ich i Pikkarten und j Herzkarten habe, und i < j gilt.
Das scheint ja eine Riesen-Fallunterscheidung zu werden!
Schreiben wir die zulässigen Paare (i,j) auf:
(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8),
(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8),
(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8),
(3,4), (3,5), (3,6), (3,7),
(4,5), (4,6)
Andere Fälle gibt es nicht, weil man ja insgesamt nicht mehr als 10 Karten bekommt.

Jeweils hat man $\binom{8}{i}\binom{8}{j}\binom{16}{10-i-j}$ auszurechnen, diese Zahlen zu addieren und am Ende diese Summe durch $\binom{32}{10}$ zu teilen.

Oder jeweils die Anzahl auszurechnet, durch $\binom{32}{10}$ zu teilen, und dann aufzuaddieren.

Können wir diese Arbeit zumindest noch für was anderes weiterverwenden?
Ja! Dieselben Ausdrücke hätten wir auch bekommen in den Fällen, wo mehr Pikkarten als Herzkarten vorliegen!
Da wäre nur i und j vertauscht gewesen, was in den Formeln keine Rolle spielt. Wichtig ist, daß es von Pik- und Herzkarten gleichviele, nämlich jeweils 8 Stück gibt.

Also: das Problem ist "symmetrisch" in den beiden Farben Herz und Pik.
Die Ereignisse "mehr Herz als Pik" (mHaP) und "mehr Pik als Herz" (mPaH) haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. Die wollen wir im Moment nicht ausrechnen, sondern als x erstmal stehen lassen. Also $p(mHaP) = p(mPaH) = x$.

Dann hat das Ereignis "mehr Herz als Pik" oder "mehr Pik als Herz" aber die Wahrscheinlichkeit $x + x = 2x$, $p(\text{ mHaP oder mPaH }) = 2x$.
Und das Gegenereignis A dazu hat die Wahrscheinlichkeit $1 - 2x$.
Könnten wir p(A) leichter ausrechnen als p(mHaP), dann wäre das eine Arbeitsersparnis! Das wäre super. Wie sieht A also aus?
Nun, A tritt ein dem Fall, daß weder mehr Herzkarten als Pikkarten, noch mehr Pikkarten als Herzlarten vorliegen. Also: im Fall von genauso vielen Herz- wie Pikkarten!

Das heißt, wir könnten statt der oben aufgelisteten fast dreißig Fälle auch die sechs Fälle $(i,j) = (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ und $(5,5)$ betrachten, da gibt es respektive

$$\binom{8}{0}\binom{8}{0}\binom{16}{10}, \quad \binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{16}{8}, \quad \binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{16}{6},$$
$$\binom{8}{3}\binom{8}{3}\binom{16}{4}, \quad \binom{8}{4}\binom{8}{4}\binom{16}{2}, \quad \binom{8}{5}\binom{8}{5}\binom{16}{0}$$

Möglichkeiten, d.h. A hat die Wahrscheinlichkeit
$p(A) = 0{,}0001 + 0{,}0127 + 0{,}0973 + 0{,}0884 + 0{,}0091 + 0{,}0000 = 0{,}2076$

Und $p(mHaP) = x = [1 - p(A)]/2 = 0{,}3962$, also etwa 40 %.

Denselben Trick kann man übrigens auch bei "Zweimal würfeln" für das Ereignis ZG = "die **z**weite Zahl ist **g**rößer als die erste" anwenden:
entweder: $p(ZG) = (5 + 4 + 3 + 2 + 1) / 36 = 15/36 = 5/12$,
oder: $p(ZG) = [1 - p(\text{zwei gleiche})]/2 = [1 - 1/6]/2 = 5/12$.

**(2.4.5) Frage:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich interessiert, wieviele Herzkarten und wieviele ich Asse habe?
**Antwort:** 42 Möglichkeiten.

???
Da muß ich für jede Möglichkeit die Zahl der Herzkarten und die Zahl der Asse angeben.
Damit ich sie nicht durcheinanderbringe, wieder als Zahlenpaar (i,j), bloß bedeutet nun i die Anzahl der Herzkarten, j die Anzahl der Asse.
Ein Problem tritt auf: was ist mit dem Herz As los? Ich kann nicht gleichzeitig 8 Herzkarten und 0 Asse haben. Oder 0 Herzkarten und 4 Asse.
Außerdem auch nicht 8 Herzkarten und 4 Asse, weil man dazu 11 Karten bräuchte. Aber ansonsten tritt alles auf, d.h. es gibt $9 \cdot 5 - 3 =$ **42 Möglichkeiten**.

Andere Zählweise, soritert nach der Anzahl j der Asse:
j = 0: 8 Möglichkeiten
j = 1: 9 Möglichkeiten
j = 2: 9 Möglichkeiten
j = 3: 9 Möglichkeiten
j = 4: 7 Möglichkeiten.
Und 8 + 9 + 9 + 9 + 7 = 42.

Und die Wahrscheinlichkeit der Möglichkeiten? Zum Beispiel, daß man 4 Herzkarten und 3 Asse hat?
Benutzt werden natürlich die sämtlichen Blätter (10-Mengen) zur Berechnung.
Also was ist p( (4,3) )? Da macht das Herz As doch große Schwierigkeiten. Betrachten wir die Aufteilung der 32 Karten in {Herz As}, die restlichen 7 Herzkarten, die restlichen 3 Asse und die restlichen 21 Karten, also 32 = 1 + 7 + 3 + 21.
Dann unterteilen wir die für (4,3) günstigen Blätter in solche, die das Herz As enthalten, und solche, die das nicht tun.

Günstig sind im ersten Fall $\binom{1}{1}\binom{7}{3}\binom{3}{2}\binom{21}{4}$ Blätter, da ja nun
1 Karte aus 1, 3 aus den 7, 2 aus den 3 und 4 = 10 - 6 aus den 21 stammen soll.

Im zweiten Fall $\binom{1}{0}\binom{7}{4}\binom{3}{3}\binom{21}{3}$ Blätter, da nun
0 Karten aus 1, dafür 4 aus den 7, 3 aus den 3 und 3 = 10 - 7 aus den 21 stammen sollen.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $\left[\binom{1}{1}\binom{7}{3}\binom{3}{2}\binom{21}{4} + \binom{1}{0}\binom{7}{4}\binom{3}{3}\binom{21}{3}\right] / \binom{32}{10}$.

Das auszurechnen schenke ich mir.

**(2.4.6) Frage:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich nur interessiert, ob ich mehr Herzkarten als Asse habe?
**Antwort:** Die Möglichkeiten "ja" oder "nein", "Erfolg" oder "Mißerfolg" - also zwei Möglichkeiten.

Und die Wahrscheinlichkeit eines "Erfolges"?

Da muß ich abzählen, wieviele Blätter mehr Herzkarten als Asse enthalten.
Viel Spaß.

**(2.4.7) Letzte dieser Fragen:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn mich interessiert, wieviele Herzkarten **und** welche Asse ich habe?
**Antwort:** 127 Möglichkeiten.

Jetzt sind die Möglichkeiten Paare (i,W), in deren erster Komponente eine Zahl $0 \le i \le 8$ steht, und in deren zweiter Komponente eine Teilmenge W der Menge
"Asse" = {Herz As, Karo As, Pik As, Kreuz As} steht.
Diese 4-elementige Menge "Asse" hat $16 = 2^4$ Teilmengen, davon 8 Teilmengen, die Herz As enthalten, 8 Teilmengen, die dies nicht tun.
Zuerst zählen wir die Paare sortiert nach der zweiten Komponente:
Ist W eine der **8** Teilmengen, die Herz As nicht enthalten, so hat man *8* Möglichkeiten für das i: nur i = 8 ist ausgeschlossen, da man ja dann das Herz As doch hätte.
Ist W eine der **8** Teilmengen, die Herz As enthalten, so hat man *8* Möglichkeiten für das i: nur i = 0 ist ausgeschlossen, da man ja dann das Herz As doch nicht hätte.
Es gibt also insgesamt $\mathbf{8}\cdot 8 + \mathbf{8}\cdot 8 = 128$ Möglichkeiten. (???) Halt: **eine** scheidet noch aus:
Es kann nicht W = "Asse" sein, und gleichzeitig i = 8 sein, denn dann hätte man 11 Karten.
Also gibt es 128 - 1 = 127 Möglichkeiten.
Nun sortiert nach der ersten Komponente mit einer Fallunterscheidung über das Herz As:
Ist das Herz As vorhanden:
8 Möglichkeiten für das i, und für **7** dieser Möglichkeiten, nämlich für i = 1, 2, ..., 7, jeweils die *8* Möglichkeiten für W, die Herz As enthalten, für **eine**, nämlich für i = 8, eine weniger, also *7* Möglichkeiten.
Ist das Herz As nicht vorhanden:
**8** Möglichkeiten für das i, nämlich für i = 0,1, 2, ..., 7, jeweils die 8 Möglichkeiten für W, die Herz As nicht enthalten.
Das ergibt $(\mathbf{7}\cdot 8 + \mathbf{1}\cdot 7) + \mathbf{8}\cdot 8 = 127$ Möglichkeiten.

Und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit z.B. der Möglichkeit (des Ereignisses)
X = "Zwei Herzkarten und von den Assen genau das Pik As"?
Natürlich für den Nenner der Laplace-Formel die $\binom{32}{10}$ Blätter von je 10 Karten.
Nun die Einteilung (Zerlegung, Partition) der 32 Karten in fünf disjunkte Teilmengen:
{Herz As},{Pik As},{restliche Asse}, {restliche Herzkarten}, {übrige Karten}, also
$$32 = 1 + 1 + 2 + 7 + 21.$$
Dann sind offenbar günstig für X: $\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{7}{2}\binom{21}{7} = 1441880$ dieser Blätter. Denn das ist die Anzahl Möglichkeiten, wie man 10 Karten aus den 32 Karten ziehen kann, so daß
0 aus der ersten Menge (Herz As fehlt), 1 aus der zweiten Menge (Pik As liegt vor),
0 aus der dritten Menge (kein weiteres As), 2 aus der vierten Menge (genau zwei Herzkarten)
7 aus der fünften Menge (sieben weitere Karten) stammen.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt also etwa **2 %**.