(I) Abzählungen, kombinatorische Methoden

(1.1) Elementare Abzählungen, Mengenalgebra

In diesem Abschnitt sollen ganz allgemein Abzählungen durchgeführt werden; das heißt für bestimmte Mengen soll jeweils festgestellt werden, wieviele Elemente sie haben.
Dabei kommt es auf die Natur der zu zählenden Elemente nicht an, ob wir Schafe auf der Weide, möglicherweise existierende Autonummern oder gar nicht erreichte Klausurpunkte zählen ist ganz egal. Fünf Schafe sind (vom Standpunkt des Zählenden) genauso gut oder schlecht wie fünf Punkte in der Klausur oder fünf Versuche, die Torwand zu treffen. Daher wollen wir meist abstrakte nicht näher beschriebene Mengen A, B, usw. (für die wir dann konkrete Mengen nach Belieben einsetzen können) abzählen - und die Ergebnisse sind dann gültig für Mengen von Schafen genauso wie für Mengen von Telefonnummern.
Leider sind die interessanten Anwendungen des Abzählens, d.h. die Situationen, wo man (zum Beispiel in der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie) etwas abzählen muß, meist so, daß man durch stumpfsinniges Aufschreiben aller Elemente und tatsächliches Abzählen (von oben nach unten etwa) nicht weit kommt.
Die Mengen sind meist ziemlich groß, oder zumindest nicht leicht hinzuschreiben.
Daher ist es **wichtig, sich geschickt anzustellen beim Zählen**, und das Zählen mit "System" durchzuführen. Wir brauchen also **Zählmethoden** bzw. **Zählprinzipien**.

(1.1.0) Handwerkszeug. Weil im folgenden mit Mengen hantiert wird, Durchschnitte, Vereinigungen etc. gebildet werden, ist ein gewisses Handwerkszeug (eine gemeinsame Sprache = eine Liste von Begriffen und Abkürzungen und einfachen Sachverhalten) nötig. Dieses Handwerkszeug, das in der Schule manchmal unter dem Firmenschild "Mengenlehre" angeboten wird, haben Sie ganz sicher seit dem ersten Semester in Ihrem Repertoire. Um Mißverständnissen vorzubeugen, will ich die benutzten Begriffe und Bezeichnungen hier jedoch noch einmal durchgehen.
Was Mengen sind, brauchen wir nicht mehr zu definieren, auch nicht, was Elemente x einer Menge A sind, (Symbol: $x \in A$), und vermerken nur: Mengen sind durch ihre Elemente auch eindeutig bestimmt. Deswegen können wir Mengen A so hinschreiben
- indem wir (zwischen Mengenklammern) **alle ihre Elemente** samt und sonders **hinschreiben**, z.B. $A = \{1,3,5,7,9\}$
- indem wir sie als die **Menge aller Elemente aus einer bestimmten Grundmenge, die eine bestimmte Eigenschaft haben**, kenntlich machen, z.B. $A = \{x \in \{1,...,10\} \mid x \text{ ungerade}\}$
- indem wir sie als die **Menge der Elemente, die man auf eine bestimmte Art (Abbildung) aus einer bestimmten Bezugs-(Parametermenge) angeben**, z.B. $A = \{2n-1 \mid n \in \{1,2,3,4,5\}\}$.

Das war dreimal dieselbe Menge A, nur verschieden hingeschrieben.

Weiter unten werden wir noch sehen, dass es mitunter auch noch die Möglichkeit gibt, eine Menge X als Vereinigung oder Durchschnitt oder Komplementmenge oder cartesisches Produkt von zwei (oder mehreren) anderen Mengen schreiben kann. Das kommt gleich, wird für Abzählungen nützlich sein.

Zwei Mengen A und B sind, wie gesagt, **gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.**
Das bedeutet also: **$A = B$, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind, und alle Elemente von B auch Elemente von A sind.**
Sind zumindest einmal die Elemente von B auch Elemente von A, bilden sie also einen Teil der Elemente von A, so nennen wir B eine Teilmenge von A. ($B \subseteq A$).
Von einer echten Teilmenge B von A sprechen wir ($B \subset A$), wenn B zwar Teilmenge von A ist, aber nicht gleich A ist. Dann gibt es also Elemente in A, die nicht Elemente von B sind. Diese Elemente fassen wir wieder zu einer Menge zusammen: $A\backslash B = \{x \in A: \ x \notin B\}$ ("A ohne B") heißt das Komplement von B in A. (Wir schreiben auch A-B, "A minus B", dafür.)
Bisher hatten alle von uns betrachteten Mengen Elemente; es gibt außerdem noch die leere Menge $\emptyset$: Sie ist "leer", hat keine Elemente, und ist dadurch auch eindeutig festgelegt.
Zur Sicherheit, und als "triviale Beispiele" von Teilmengenbeziehungen erwähnen wir:
Jede Menge ist Teilmenge ihrer selbst, und die leere Menge ist Teilmenge jeder beliebigen Menge.
In der Definition des Komplements einer Menge B in einer Menge A haben wir bereits etwas erlebt, was immerfort getan wird - die wundersame Vermehrung von Mengen. Oft hat man zwei Mengen vorliegen, und bastelt sich daraus eine "neue" Menge. Dort hatte man Mengen A und B und bastelte A-B (allerdings nur, wenn B Teilmenge von A war.)
Es gibt aber auch universell anwendbare "**Mengenoperationen**". Die wichtigsten sind (außer der **Komplementbildung**) **Durchschnitt, Vereinigung und kartesisches Produkt**.

Zuerst Durchschnitt und Vereinigung.

$A \cap B = \{x: x \in A \text{ und } x \in B\}$ heißt der Durchschnitt von A und B.
$A \cup B = \{x: x \in A \text{ oder } x \in B\}$ heißt die Vereinigung von A und B.

Bild

Sicher ist $A \cap B$ eine Teilmenge von A, da ja gerade in der Mengenklammer steht, daß seine Elemente auch Elemente von A sind (sogar noch mit der Einschränkung, daß sie noch dazu in B liegen sollen).
Sicher ist A eine Teilmenge von $A \cup B$, denn in der Mengenklammer steht ja gerade, daß die Elemente aus A zugelassen sind (und noch dazu die aus B).
Also gilt stets: **$A \cap B \subseteq A$ und $A \subseteq A \cup B$.**

Manchmal treten "kompliziertere Ausdrücke" als nur die einfache Vereinigung oder Schnittmenge zweier Mengen auf, wenn nämlich eine der beiden selbst wieder als Schnitt oder Vereinigung zweier Mengen geschrieben wird.
Zum Beispiel: $A \cap (B \cap C)$ oder $(A \cup B) \cup C$.
Da sieht man sofort, daß $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ gilt, daß also bei jeder möglichen Klammerung dieselbe Menge herauskommt, so daß man die Klammern also getrost weglassen kann.

Es gelten für die beiden Operationen $\cup$ und $\cap$ also "Assoziativgesetze"
wie bei "+" und "·" auf den reellen Zahlen.

Frage: gelten auch die beiden **"Kommutativgesetze"**?
Antwort: selber herausfinden.

Frage: Wie sieht es aus, wenn man gemischte Ausdrücke hat?
Antwort: Es gilt

$$\boxed{A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C).}$$

Das ist allerdings nicht sofort zu sehen, das muß man beweisen - tun wir es!

Die beiden Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben. Keine der beiden Mengen darf ein Element haben, das nicht in der anderen Menge vorkommt.
Wir zeigen also, dass $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$ gilt und dass $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$ gilt. Dann sind wir fertig.

Sei $x \in A\cap(B\cup C)$ beliebig. Dann ist x in A enthalten, und in $B\cup C$. Ist x in B enthalten, so wegen $x \in A$ sogar in $A\cap B$. Dann natürlich auch in $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
Oder x ist nicht Element von B. Dann ist wegen $x \in B\cup C$ aber x in C enthalten, wegen $x \in A$ sogar in $A\cap C$. Dann natürlich auch in $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
Wir haben gezeigt, dass jedes beliebige Element x von $A\cap(B\cup C)$ auch Element von $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ist, also $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Sei $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$ beliebig. Dann ist x in $A\cap B$ enthalten, oder in $A\cap C$.
Ist x in $A\cap B$ enthalten, so in A und in B, also auch in $B\cup C$. Dann natürlich auch in $A\cap(B\cup C)$.
Oder x ist nicht Element von $A\cap B$. Dann ist wegen $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$ aber x in $A\cap C$ enthalten, also in A und in C, also auch in $B\cup C$. Dann natürlich auch in $A\cap(B\cup C)$.
Wir haben gezeigt, dass jedes beliebige Element x von $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ auch Element von $A\cap(B\cup C)$ ist, also $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$.

Das sieht wie ein "Distributivgesetz" aus, und ist es auch, wenn wir $\cup$ mit + und $\cap$ mit $\cdot$ identifizieren. Weil man mit den Mengen auf diese Weise nach "algebraischen Regeln" rechnen kann, spricht man auch von "Mengenalgebra".
Überraschenderweise gilt aber auch das entsprechende "**Distributivgesetz**", in dem die Rollen von $\cap$ und $\cup$ vertauscht sind:

$$\boxed{A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)}$$

Auch das müßte man eigentlich beweisen (Das ist leicht! Es geht genauso wie der Beweis oben). Aber da hört offenbar die Analogie mit "+" und "·" auf. Denn "**dieses** komische **Distributivgesetz**"

$$a + (b\cdot c) = (a + b)\cdot(a + c)$$

gibt es für Zahlen n i c h t.

Betrachtet man Ausdrücke, in denen Durchschnitte und Komplemente vorkommen, oder in denen Vereinigungen und Komplemente vorkommen, so gelten auch gewisse Regeln (nach einem gewissen **de Morgan** benannt).
Sie lauten (aus dem ersten Semester bekannt, die Grundmenge, bezüglich derer Komplemente gebildet werden, heiße M):

$$M \setminus (A\cup B) = (M\setminus A) \cap (M\setminus B)$$
$$M \setminus (A\cap B) = (M\setminus A) \cup (M\setminus B)$$

Wenn wir die Grundmenge nicht extra erwähnen wollen, und die Komplementbildung in dieser Grundmenge durch einen Querstrich andeuten, so ergibt sich:

$$\overline{A\cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A\cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Weiter wollen wir den Fall betrachten, daß mehr als zwei Mengen vereinigt oder durchgeschnitten werden: dafür empfiehlt sich eine Abkürzung:
Seien die betrachteten Mengen A_1, A_2, ...A_n, dann setzen wir

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap...\cap A_n = \{x\text{: x liegt in allen } A_i\} = \{x\text{: } x \in A_i\text{, für } i = 1,2,..,n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup...\cup A_n = \{x\text{: x liegt in mindestens einem } A_i\} =$$
$$= \{x\text{: es gibt ein i, so daß } x \in A_i\}$$

Wegen der "Assoziativ-/Kommutativgesetze" braucht man keine Klammerung anzugeben, und kommt es auf die Reihenfolge der A_i nicht an.
Man kann auch den Schnitt und die Vereinigung von unendlich vielen Mengen definieren (ganz analog), wir brauchen das aber erstmal nicht. Auch für diese "beliebigen Schnitte und Vereinigungen" gibt es die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten, Regeln, die wir aber nicht extra erwähnen.

Jetzt zum kartesischen Produkt.

$$A\times B = \{(a, b)\text{: } a\in A,\ b\in B\}$$

Hier ist darauf zu achten, daß es sich um Paare im mathematischen Sinne handelt, also die Reihenfolge "1.Komponente, 2.Komponente" wesentlich ist. Bei den Ortsvektoren im Raum oder in der Ebene kann man ja auch nicht einfach Koordinaten vertauschen.
Hier liegt ein großer Unterschied zwischen der Menge {a,b} und dem Paar (a,b). In der Mengenklammer kann ich beim Hinschreiben die Reihenfolge wählen, wie es mir paßt, darauf kommt es nicht an. Im Paar (2-Tupel) kommt es auf die Reihenfolge sehr wohl an.
Dafür tritt noch ein anderes Phänomen auf, wenn man $A\times A$ betrachtet:
es gibt natürlich die Paare (a, a) - aber in der Menge, die a enthält, also in {a}, kommt das Element a nur einmal vor, {a, a} wäre also irreführend.

Bei Mengen kommt es auf die Reihenfolge, in der wir die Elemente zwischen die Mengenklammern schreiben, nicht an. Dafür darf jedes Element nur einmal genannt werden.
Bei Paaren kommt es auf die Reihenfolge an, dafür kommt so etwas wie (a, a) öfters mal vor.

Auch für gemischte Ausdrücke mit kartesischem Produkt, Durchschnitt, Vereinigung und Komplement gibt es wieder Regeln - aber die schenken wir uns. Beachten sollte man vielleicht, daß es keine Enthaltenseinsbeziehungen zwischen A und A×B geben kann: die Elemente von A sind von ganz anderem Typ als die in A×B: (egal was B ist)
zum Beispiel:

Äpfel in A	Paare von Äpfeln in A×A
Zahlen in Z	Paare von Zahlen und Birnen in Z×B
Paare von Zahlen in ZP	Paare von Zahlenpaaren und Zahlen in ZP×Z

Es werden auch kartesische Produkte mit mehrere Faktoren betrachtet und daher Abkürzungen für sie gebraucht.

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1,a_2,...,a_n):\ a_i \in A_i\}$$

Ihre **Elemente heißen n-Tupel** von Elementen aus A_i, i = 1,..,n. Und a_i ist die **i-te Komponente** des n-Tupels $(a_1,a_2,...,a_n)$. Ein n-Tupel hat also n Komponenten.
Im Spezialfall, wenn alle A_i gleich sind, etwa gleich A, so schreiben wir A^n für das n-fache Produkt von A mit sich selbst.

Ende der Wiederholung altbekannter Tatsachen.

(1.1.1) Definition. Die Mächtigkeit einer Menge A, in Zeichen |A|, ist die Anzahl der Elemente in A. Eine Menge mit n Elementen, (n∈N oder n = 0) hat also die Mächtigkeit n.

Da die leere Menge gar keine Elemente hat, also 0 Elemente, ist ihre Mächtigkeit gleich 0. Desweiteren sieht man sofort ein, daß die Menge {1,2,3,...,n} die Mächtigkeit n hat, denn die natürlichen Zahlen von 1 bis n sind n Stück: das ist praktisch die Definition der natürlichen Zahl n (siehe WGMS II).
Bei anderen nichtleeren, endlichen Mengen A wird man die Mächtigkeit gewöhnlich durch eine Abzählung herausbekommen. Man identifiziert dabei die Elemente von A irgendwie mit den Zahlen aus {1,2,...,n}, deren Anzahl n man ja kennt.
Und das geht so: man deutet (wenn es um eine Zahlenmenge geht, mit dem geistigen Finger, wenn es zum Beispiel um Schulkinder in einer Klasse geht, sogar mit dem richtigen Finger) auf irgendein Element a∈A und sagt "Eins". Dann nimmt man ein anderes her und sagt "zwei" und macht so weiter, bis alle Elemente aus A eine Nummer bekommen haben. Die größte vergebene Zahl ist die Anzahl der Elemente, also ihre Mächtigkeit.

Durchzählen einer Menge A der Mächtigkeit n bedeutet also eine "**Abzählbijektion**" (also eine bijektive Abbildung g: A → {1,2,...,n}) von der Menge A auf {1,2,...,n} herstellen. Dabei wird jedem Element seine Nummer zugeordnet. In unserem Beispiel wurde jedem Kind die Nummer zugeordnet, die gesagt wurde, wenn es mit dem Finger "angetippt" wurde. Hätte man die Kinder in irgendeiner Weise (durch Aufstellen in einer Reihe oder die Sitzordnung) angeordnet, und selbst durchzählen lassen, hätte jedes Kind sogar sein Bild, also seine Nummer, selbst verkündet.
Man hätte das Durchzählen natürlich auch folgendermaßen auffassen können: jede Zahl aus {1,2,...,n} wird durch eine Abbildung f: {1,2,...,n} → A auf ein Kind aus A abgebildet:

das Kind f(3), das Kind, das der Zahl 3 zugeordnet wird, ist bei der Abzählung das dritte Kind.
Hier sehen wir schon, daß das Abzählen "in beide Richtungen" funktioniert.

(1.1.2) Bemerkung/Definition. Sei A eine nichtleere Menge. Genau dann hat A die Mächtigkeit n, wenn es eine bijektive Abbildung von A auf $\{1,2,...,n\}$gibt.

Daß es sich um eine bijektive Abbildung handelt, bedeutet hierbei im einzelnen:
Abbildung: jedes Element (Kind) bekommt genau eine Zahl als Nummer (keines bekommt mehrere Nummern, und es wird auch kein Element (Kind) "vergessen")
injektiv: jede Nummer wird nur einmal vergeben
surjektiv: jede der Zahlen 1,2,...,n kommt tatsächlich als Nummer vor.

Ab jetzt wollen wir bis auf Widerruf nur mehr endliche Menge betrachten; die Mächtigkeit einer Menge wird also stets eine nichtnegative ganze Zahl sein. Mit diesen kann man rechnen.

(1.1.3) Bemerkung: Seien A und B Mengen. Existiert eine bijektive Abbildung von A auf B, so gilt $|A| = |B|$. Gilt $|A| = |B|$, so existiert auch eine Bijektion von A auf B.
Beweis: Ist $f: B \rightarrow A$ eine Bijektion, und ist $g: A \rightarrow \{1,2,...,n\}$ eine Abzählbijektion, so ist die zusammengesetzte Abbildung $h: = g^{\circ}f : B \rightarrow \{1,2,...,n\}$ eine Bijektion, also $|B| = n$ (= $|A|$).
Gilt $|B| = |A| = n$, so existieren Bijektionen $h: B \rightarrow \{1,2,...,n\}$ und $g: A \rightarrow \{1,2,...,n\}$. Die Abbildung $f := (h^{-1})^{\circ}(g): A \rightarrow B$ ist dann eine Bijektion von A auf B.

(1.1.4) Beispiele: Der Kürze halber verwenden wir hier bereits die Tatsache (bzw. Definition) für Binomialkoeffizienten, dass nämlich jede Menge mit n Elementen genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen hat ($0 \le k \le n$ beliebig).
(i) $A = \{12, 13, ..., 31\}$ hat 20 Elemente. Bijektion $g: A \rightarrow \{1,2,...,20\}$ mit $g(k) = k-11$.
(ii) $A = \{-13, -12, ..., 31\}$ hat 45 Elemente. Bijektion $g: A \rightarrow \{1,2,...,45\}$ mit $g(k) = k+14$.
(iii) $A = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10, ..., 65\}$ und $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 13\}$ haben gleich viele Elemente. Bijektion $g: B \rightarrow A$ mit $g(k) = 5k$.
(iv) $A = \{(x_1, x_2, ..., x_n): x_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\}$ hat $\binom{n}{2}$ Elemente.
Die Bijektion g von A auf die Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, ..., n\}$ ordnet jedem $a \in A$, $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$, die Teilmenge $\{i, j\}$ von $\{1,2,...,n\}$zu, für die gilt $x_i = x_j = 1$.
Dabei ist g **wohldefiniert**, da wegen $x_i \in \{0,1\}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$ genau zwei der Komponenten x_i gleich 1 sind.
Außerdem ist g **surjektiv**, weil zu jeder Teilmenge $\{i,j\}$ von $\{1,2,...,n\}$ als Urbild das Tupel (0,0,..,1,0,..,1,...0) mit den beiden Einsen in der i-ten und j-ten Komponente existiert.
Außerdem ist g auch **injektiv**, weil man zu jeder Teilmenge $\{i,j\}$ von $\{1,2,...,n\}$ das Urbild-Tupel (0,0,..,1,0,..,1,...0) mit den beiden Einsen in der i-ten und j-ten Komponente eindeutig rekonstruieren kann, also die **Umkehrabbildung** angeben kann.

(v) Die Menge $A = \{ \{x_1, x_2, ..., x_7\}: x_i \in \{1,2,...,15\}$, genau drei der x_i sind kleiner als 5$\}$ hat genau $\binom{4}{3}\binom{11}{4} = 1320$ Elemente.

Es gibt eine Abbildung g von A auf die Menge der Paare (X,Y) mit einer 3-elementigen Teilmenge X von {1,2,3,4}, und einer 4-elementigen Teilmenge Y von {5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}.
Dazu ordnet man jedem $a \in A$ (a ist hier eine 7-elementige Menge!) das Paar $g(a) := (a \cap \{1,2,3,4\}, a \cap \{5,6,...,15\})$ zu.
Die Durchschnittbildung ist sicher eindeutig und liefert nach Definition von A in der ersten Komponente eine 3-elementige Teilmenge X von {1,2,3,4}, und als zweite Komponente eine 4-elementige Teilmenge Y von {5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}.
Also ist g eine **Abbildung**.
g ist **surjektiv**: Denn zu dem Paar (X,Y) ist sicher $a = X \cup Y$ ein Urbild in A.
g ist **injektiv**: Das Urbild $a = X \cup Y$ zu beliebigem (X,Y) unter g läßt sich eindeutig rekonstruieren, die **Umkehrabbildung** zu g existiert also.
Daß die Menge der Paare dieses Produkt als Mächtigkeit hat, werden wir sofort sehen.

(vi) Es gibt genau $\binom{11}{4}$ Möglichkeiten, vier Kugeln (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge) aus einer Urne mit 11 Kugeln zu ziehen.
Die Kugeln seien mit den Zahlen von 1 bis 11 nummeriert. Nennen wir die Menge der Möglichkeiten Ω. Bei jeder Möglichkeit $\omega \in \Omega$ kucken wir, was "herausgekommen" ist. Es ist jeweils eine Menge von 4 Kugeln. Deren Nummern schreiben wir auf, das ergibt eine Menge X von vier Zahlen aus {1,2,...,11}.
Dieses X ordnen wir dem $\omega \in \Omega$ zu. Das Verfahren ist offenbar eindeutig, also haben wir eine **Abbildung g** von Ω in die Menge der 4-elementigen Teilmengen von {1,2,...,11} definiert.
g ist surjektiv, denn zu jeder 4-er Menge X gibt es sicher die Möglichkeit, daß die vier Kugeln mit den Nummern aus X gezogen werden kann.
g ist injektiv, denn wenn bei zwei Möglichkeiten dieselben 4-er Mengen von Nummern herauskommen, sind dieselben Kugeln gezogen worden, und es hatte sich um dieselbe Möglichkeit gehandelt.

Stellen wir uns die oben angedeutete Frage:

Was können wir über die Mächtigkeit einer Menge aussagen, wenn wir wissen, daß sie sich als Vereinigung, als Durchschnitt oder als kartesisches Produkt schreiben läßt?

Zuerst zum **Durchschnitt**:

Da haben wir bemerkt, daß $A \cap B$ eine Teilmenge von A ist, und ebenfalls eine Teilmenge von B. Nun ist es sicher klar, daß Teilmengen höchstens so viele Elemente haben, wie die Obermengen: also folgt

$$\boxed{|A \cap B| \le \min\{|A|, |B|\}}$$

Mehr kann man nicht erwarten. Beide Extremfälle $|A\cap B| = 0$ (falls A und B disjunkt sind) und $|A\cap B| = |A|$ (falls A eine Teilmenge von B ist) sind möglich - und natürlich auch alles dazwischen.

Wie zählt man nun Mengen ab, die sich als **Vereinigung** zweier Mengen A und B schreiben lassen? Kann man die beiden Mengen A und B, die ja in der Vereinigung irgendwie drinstecken, nacheinander abzuzählen, um die Mächtigkeit $|A\cup B|$ zu berechnen?
Da ist man sicher in der Gefahr, Elemente doppelt zu zählen! Betrachten wir zunächst den Fall, daß A und B keine gemeinsamen Elemente haben. Dazu wieder eine Abkürzung:

(1.1.5) Definition. Seien A, B Mengen. Gilt $A\cap B = \emptyset$, so heißen A und B disjunkt. Sind A_1, A_2,..., A_n Mengen, für die je zwei der A_i disjunkt sind, so nennt man sie paarweise disjunkt. Läßt sich eine Menge X als Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, .., A_n$ schreiben, so heißt $\{A_1, A_2, .., A_n\}$ eine **Partition** von X.

(1.1.6) Lemma. Seien A, B disjunkte Mengen. Dann gilt:

$$|A\cup B| = |A| + |B|.$$

Beweis. Seien zur Abkürzung $|A| = n$, und $|B| = m$. Dann gibt es also eine Bijektion $f: A\to\{1,2,...,n\}$ und eine Bijektion $g: B\to\{1,2,...,m\}$. Auf der Vereinigung $A\cup B$ definieren wir: $h(x) = \begin{cases} f(x) & x\in A \\ n+g(x) & x\in B \end{cases}$. Dann ist, da A und B keine gemeinsamen Elemente besitzen, h eine Abbildung von $A\cup B$ nach $\{1,2,...,n,n+1,...,n+m\}$. Da f und g bijektiv sind, ist auch h bijektiv. (Das ist so leicht zu sehen, daß ich mir den Beweis spare.)

Bild

Wo kann man dieses Lemma anwenden?
Nun, wenn eine Menge C unhandlich abzuzählen ist, kann man versuchen, C als disjunkte Vereinigung zweier leichter abzuzählender Mengen A und B zu schreiben. Dann berechnet sich $|C|$ aus den Zahlen $|A|$ und $|B|$.

Es ist auch nützlich im Beweis folgender Bemerkung:

(1.1.7) Bemerkung. Sei B eine Teilmenge von A. Dann gilt $|A| = |B| + |A-B|$, insbesondere also $|A-B| = |A| - |B|$.

Hier ist klar, daß A die disjunkte Vereinigung von B mit A-B ist, also folgt die Behauptung aus dem Lemma. Die Bemerkung könnte man benutzen, um die Mächtigkeit von Komplementen zu berechnen. Oder um noch einmal einzusehen, daß $|B| \leq |A|$ für Teilmengen B von A gilt.

Wie sieht es mit der Bestimmung von $|A\cup B|$ aus, wenn A und B nicht mehr disjunkt zu sein brauchen? Schwieriger.

(1.1.8) Lemma. Seien A, B beliebige Mengen. Dann gilt $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

Beweis. **Erster Beweis**. Wir stellen $A\cup B$ als disjunkte Vereinigung von zwei Teilmengen, nämlich von A und $B-(A\cap B)$, dar, und verwenden (1.1.6) und (1.1.7).

Dazu müssen wir erstmal nachweisen, daß sich **$A\cup B$ tatsächlich** als **disjunkte Vereinigung** dieser beiden Teilmengen schreiben läßt.
Es gilt **$A \cap [B-(A\cap B)] = \emptyset$**, denn sei x ein Element aus $B-(A\cap B)$, dann liegt x sicher in B, und in A, also in $A\cap B$. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass x in $[B-(A\cap B)]$ liegt.
Also gibt es keine Elemente in dem Schnitt.
Es gilt **$A\cup B = A \cup [B-(A\cap B)]$**.
Klar ist $A \subseteq A\cup B$ und $B-(A\cap B) \subseteq B \subseteq A\cup B$, also gilt "$\supseteq$".
Zu zeigen ist "$\subseteq$".
Sei x ein beliebiges Element aus $A\cup B$.

1. Fall: $x \in A$. Dann ist sicher auch $x \in A\cup[B-(A\cap B)]$.
2. Fall: $x \notin A$. Dann ist aber $x \in B$, und es gilt $x \notin A\cap B$, weil x ja sonst in A läge.

Also gilt $x \in B-(A\cap B)$, und daher sicher auch $x \in A\cup[B-(A\cap B)]$.
Also folgt $A\cup B \subseteq A\cup[B-(A\cap B)]$, was zu zeigen war.

Und jetzt noch (1.1.6) und (1.1.7) verwenden und rechnen:
$|A\cup B| = |A \cup (B-(A\cap B))| = |A| + |B-(A\cap B)|$ nach (1.1.6)
$= |A| + (|B| - |A\cap B|)$ nach (1.1.7)
$= |A| + |B| - |A\cap B|$.

Solche Beweisschritte wie eben sind länglich und ermüdend, aber meist Schritt für Schritt völlig klar. Wir wollen von nun ab etwas legerer mit solchen Argumenten umgehen, Sachverhalte an einem Bildchen klarmachen.
Wir müssen uns aber stets klar darüber sein, daß auch solche länglichen Beweise zu unserem Repertoire gehören müssen. "Sieht man doch" trifft oft die Situation, es muß bei Nachfrage aber auch ein exakter Beweis möglich sein.
Also das Bildchen:

Wir hätten in dem Bildchen auch gerne eine "Dreiteilung" von $A\cup B$ durchgeführt:

Das wäre dann eine recht übersichtliche (symmetrische) Zerlegung von $A \cup B$ in drei paarweise disjunkte Teilmengen gewesen. Gibt es da auch einen "Summensatz" für n Summanden?

(1.1.9) Satz (Summenregel). Seien $A_1, A_2, ..., A_n$ paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Beweis. Anschaulich ist das so klar wie (1.1.6); ein formaler Beweis geht durch Induktion über die Anzahl n der beteiligten Mengen. Im Fall n=1 sind linke und rechte Seite automatisch gleich. Wem dieser "Spezialfall" nicht behagt, kann auch noch einmal für n=2 verankern: die Verankerung ist dann gerade (1.1.6).

Induktionsschritt von n nach n+1: Sei die Behauptung also für n-fache Vereinigungen gezeigt. Dann gilt für beliebige Mengen $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$$

Hierbei wurde benutzt, daß A_{n+1} disjunkt zu der betrachteten n-fachen Vereinigung ist, um (1.1.6) anzuwenden, und die Induktionsannahme, um die Mächtigkeit der n-fachen Vereinigung so zu schreiben.

Wie könnten wir die Summenregel (1.1.9) im Beweis von (1.1.8) benutzen? Wir haben, wie man sieht, und auch analog wie oben nachweist, eine Zerlegung (Partitionierung) von $A \cup B$ in drei (disjunkte) Teilmengen. Daher gilt

$$|A \cup B| = |(A-(A\cap B)) \cup (A\cap B) \cup (B-(A\cap B))| =$$
$$|(A-(A\cap B))| + |(A\cap B)| + |(B-(A\cap B))| = |A| - |A\cap B| + |A\cap B| + |B| - |A\cap B| =$$
$$|A| + |B| - |A\cap B| .$$

Also dasselbe Resultat wie beim ersten Beweis.

Und auch dieser **zweite Beweis** für (1.1.8) ist mir noch zu **rechnerisch**. Der folgende Beweis ist (hoffentlich) anschaulich.

Wir haben zwei Formeln für die Anzahl der Elemente in $A \cup B$, einmal $|A \cup B|$ und einmal $|A| + |B| - |A \cap B|$. Da wir zweimal dieselbe Menge abzählen, müssen beide Zahlen übereinstimmen. Das ist unsere Gleichung. Wir können den Beweis dafür, daß die Gleichung richtig ist, nun so formulieren:

Links zählen wir jedes Element nach Definition genau einmal. Rechts erst die aus A, dann die aus B, dabei haben wir die Elemente, die nicht in $A \cap B$ liegen, richtig genau einmal gezählt, die in $A \cap B$ zweimal. Wenn wir nun $|A \cap B|$ abziehen, haben wir auch sie, und damit alle Elemente genau einmal gezählt.

Wer das mit dem "Zählen" nicht anschaulich findet:
tun wir für jedes "gezählte" Element ein Steinchen in eine Schale.
Dann müssen am Ende $|A\cup B|$ Steinchen in der Schale sein. Für die Elemente von $A-(A\cap B)$ und $B-(A\cap B)$ liegt jeweils genau ein Steinchen in der Schale, wenn wir erst A, dann B abzählen. Für die Elemente aus $A\cap B$ haben wir dabei zwei Steinchen hineingetan. Wenn wir für jedes wieder ein Steinchen herausnehmen, stimmt wieder alles.

Nun zur Vereinigung von beliebig vielen Mengen.
Natürlich zuerst die leichten Fälle. Die schweren Fälle am Ende.

Kommen wir zum allgemeinen Fall mit disjunkten Mengen, und alle seien gleichmächtig.

(1.1.10) Korollar. Seien $A_1, A_2, ..., A_n$ paarweise disjunkte Mengen mit gleicher Mächtigkeit (etwa der Mächtigkeit k - gebe es z.B. eine Bijektion von jeder Menge A_i auf A_{i+1}.).
Dann gilt $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = n \cdot |A_1| = n \cdot k$.

Beweis. Anwendung von (1.1.9).

Wie kann man (1.1.10) anwenden?
Nun, besonders geschickt zählen kann man, wenn man die abzuzählende Menge in mehrere gleichgroße Gruppen unterteilen kann. Dann braucht man nur die Anzahl der Gruppen mit der (gemeinsamen) Mächtigkeit der Gruppen zu multiplizieren.

Oder man kennt die Gesamtzahl der Elemente eine Menge, und die Mächtigkeit jeder Gruppe: dann erhält man durch Rechnung die Anzahl der Gruppen.

Oder man kennt die Gesamtzahl der Elemente eine Menge, und die Anzahl der (bekanntermaßen gleichgroßen) Gruppen: dann erhält man durch Rechnung die Mächtigkeit der Gruppen. (Das nennt man üblicherweise dividieren.)

Die Beispiele führen uns direkt zu den **kartesischen Produkten**.

(1.1.11) Lemma. Es gilt $|A\times B| = |A|\cdot|B|$.

Beweis. Zum Beweis schaut man einfach ein **Matrix**-förmiges Bildchen an, bei dem über die Spalten die Elemente von A geschrieben werden, links neben die Zeilen die Elemente von B.
Die Elemente von A indizieren daher die Spalten durch, die Elemente von B die Zeilen. An der Schnittstelle der zu b gehörigen Zeile mit der zu a gehörigen Spalte steht das Paar (a, b).
Die Zeilen sind nun so lang, wie es Spalten, also Elemente von A gibt, die Spalten sind so lang, wie es Zeilen, also Elemente von B gibt.
Sicher bildet die Einteilung in Spalten eine Partition von $A\times B$ in Teilmengen der (jeweils gleichen) Mächtigkeit $|B|$. Da es $|A|$ Spalten sind, folgt $|A\times B| = |A| \cdot |B|$ aus (1.1.10).
Man könnte auch eine Einteilung in Zeilen vornehmen: dann erhielte man $|B|$ Zeilen der (jeweils gleichen) Länge $|A|$, also wieder dasselbe Ergebnis.
Ein Blick auf den Spiel-Würfel: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

Die **Matrixschreibweise** erinnert auch an Punkte im 2-dimensionalen Raum. Wenn auf der x-Achse die Elemente von A, auf der y-Achse die Elemente von B abgetragen werden, entspricht dem Paar (a, b) genau der entsprechende Punkt, d.h. a und b sind seine **Koordinaten** (Komponenten des Ortsvektors).

Eine andere Möglichkeit, das kartesische Produkt $A \times B$ bildlich darzustellen, ist das sogenannte

Baumdiagramm.

Hierbei beginnt man den Baum (seltsamerweise oben, manchmal auch links) mit einer Wurzel, die keinen Namen erhält. Von der Wurzel aus gehen Äste, die mit den Elementen aus A beschriftet werden und an deren Endpunkten jeweils weitere Äste ansetzen, die mit den Elementen aus B beschriftet werden. **Dem Weg von der Wurzel bis zu dem Endpunkt über die Äste a und b entspricht dann das Paar (a,b).**

Oft sind kartesische Produkte mit mehr als zwei Faktoren abzuzählen.

Die Tupelschreibweise bereitet keine Schwierigkeiten, das Baumdiagramm im Prinzip auch nicht. Die Äste verästeln sich halt gerade so oft, wieviele Faktoren das Produkt hat.
Aber die Matrix-/Koordinatenschreibweise läßt sich nicht gut verallgemeinern. Ein Tripel (x,y,z) müßte dann schon als Punkt im 3-dimensionalen Raum dargestellt werden, und Quadrupel (4-Tupel) wären noch schwieriger zu zeichnen.

Als **einfache Merkregel** für das Abzählen von Tupeln:
"So viele Möglichkeiten für die erste Stelle mal so viele Möglichkeiten für die zweite Stelle mal usw. ... " Es werden alle "jeweils erlaubten Anzahlen" einfach nacheinander aufmultipliziert.
Zum Beispiel identifiziert man leicht 6-stellige Telefonnummern mit den 6-Tupeln von Ziffern, wo an der ersten Stelle die Ziffern {1,2,..,9}, sonst überall die Ziffern {0,1,2,..,9} erlaubt sind.
Es gibt also maximal 9 10 10 10 10 10 = 900000 6-stellige Telefonnummern.
(Das stimmt: man hätte auch so rechnen können: es gibt 999 999 höchstens 6-stellige natürliche Zahlen (die fangen mit einer Ziffer ungleich 0 an). Davon sind 99 999 höchstens 5-stellig, scheiden also aus. Es bleiben 900 000 genau 6-stellige Zahlen.)

Zumindest den wichtigsten Fall wollen wir nun beweisen.

(1.1.12) Satz (Multiplikationsregel). Seien $A_1, A_2, .., A_n$ nichtleere Mengen. Dann gilt

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1||A_2|\ldots|A_n|$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Anzahl der Faktoren. Für die Verankerung n = 1 ist nichts zu zeigen. Im Induktionsschritt werden (n+1)-Tupel $(a_1,...,a_{n+1})$ mit Paaren $((a_1,..,a_n), a_{n+1})$ identifiziert und (1.1.11) angewandt.

In (1.1.12) wurden die sämtlichen n-Tupel gezählt, die in der i-ten Komponente jeweils ein (beliebiges) Element aus A_i stehen haben, $A_1, A_2, .., A_n$ nichtleere Mengen. Es gibt auch eine entsprechende Multiplikationsregel für n-Tupel, in denen die Elemente in den Komponenten **gewissen Restriktionen** unterworfen sind.

Davon brauchen wir aber doch nur einen Spezialfall.

EINSCHUB (für Interessierte).

Gehen wir daran, **Tupel** zu **zählen**. Dass es meist nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge die Komponenten der Tupel gezählt werden, folgt so (wir beginnen mit Paaren):

(E.1) Satz: (*Doppelte Abzählung*) Seien A und B zwei (nichtleere) Mengen, und sei "gehören zu" eine Relation zwischen Elementen aus A und solchen aus B. Gehöre jedes $a\in A$ zu genau x Elementen $b\in B$, und zu jedem $b\in B$ gehören genau y Elemente $a\in A$; dann hat die Menge $\{(a,b): a\in A, b\in B,$ a gehört zu b$\}$ genau $|A|\cdot x = |B|\cdot y$ Elemente.

Zum Beweis betrachten wir zu jedem $a\in A$ die Menge $B_a := \{b\in B,$ a gehört zu b$\}$.
Und zu jedem $b\in B$ die Menge $A_b := \{a\in A,$ a gehört zu b$\}$.
Dann kann man die Menge $\{(a,b): a\in A, b\in B,$ a gehört zu b$\}$ schreiben als
- disjunkte Vereinigung der $|A|$ x-elementigen Mengen $\{(a,b): b\in B_a\}$, $a\in A$,
- disjunkte Vereinigung der $|B|$ y-elementigen Mengen $\{(a,b): a\in A_b\}$, $b\in B$.

Die Behauptung folgt.

In den Anwendungen werden die Mengen meist nicht A oder B, sondern irgendwie anders heißen, und die Zahlen x und y können Sie auch r und s oder t und u oder sonst wie nennen, darauf kommt es gar nicht an.
Wichtig ist: Wenn Sie drei der vier Zahlen, die im Satz $|A|$, $|B|$, x und y genannt werden, herausbekommen können, liefert die Gleichung Ihnen die vierte auch noch.

(E.2) Beispiel. Eine Kindergartengruppe besteht aus 14 Kindern. Da sind Buben und Mädchen dabei. Jeder Bub ist mit genau drei Mädchen befreundet, jedes Mädchen mit genau vier Buben. Wie viele Buben und wie viele Mädchen sind es?
Eine der Mengen ist B, die Menge der Buben, das seien etwa x Stück. Dann hat die Menge M der Mädchen in der Gruppe 14 – x Elemente. Die Relation heißt nun "befreundet", und jeder Bub $b\in B$ ist mit genau 3 Mädchen $m\in M$ befreundet, jedes Mädchen $m\in M$ mit genau 4 Elementen $b\in B$.
Zählen wir Paare von befreundeten Kindern, also Paare (b, m) mit $b\in B$, $m\in M$ und der Eigenschaft, dass b und m befreundet sind.
Es ergibt sich: $x\cdot 3 = (14 - x)\cdot 4$, also $7x = 56$ und $x = 8$.
Es sind also 8 Buben und 6 Mädchen.

Nun zum allgemeinen Fall: zum Zählen von n-Tupeln.
Wo wir bisher (bei den Paaren) durch eine Relation beschrieben haben, welche Elemente $b\in B$ wir in die zweite Komponente schreiben dürfen, wenn $a\in A$ in der ersten Komponente steht, machen wir es uns jetzt einfacher. Wir geben diese entsprechenden Anzahlen als "Zahl der Möglichkeiten für $b\in B$" an, die wir "dann" für die zweite Komponente haben, wenn $a\in A$ in der ersten Komponente steht. Und entsprechende Formulierung verwenden wir auch bei n-Tupeln: wir sprechen von der Anzahl Möglichkeiten für die (j+1)-te Komponente der Tupel, wenn die Komponenten 1 bis j bereits "aufgefüllt" sind.

(E.3) Satz: (*Abzählung von k-Tupeln, Multiplikationsregel*)

Seien $A_1, A_2, ..., A_k$ (nichtleere, nicht unbedingt verschiedene) Mengen, es sollen bestimmte k-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_k)$ mit $a_i \in A_i$ abgezählt werden, indem ein "leeres" k-Tupel von links nach rechts mit Elementen $a_i \in A_i$ aufgefüllt wird und Buch geführt wird, wieviele Möglichkeiten es jeweils dafür gibt. Gelte:
Es gibt n_1 für die Auswahl von a_1
und **dann** n_2 für die Auswahl von a_2
und **dann** n_3 für die Auswahl von a_3
...
...
und **dann** n_k für die Auswahl von a_k.
Dann gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ solcher k-Tupel.

Übrigens (wie bei der doppelten Abzählung) kann man oft dieselbe Menge von k-Tupeln auf verschiedene Art abzählen. Etwa hinten (ganz rechts im Tupel) zu zählen beginnen. Dann sind die Faktoren n_i vielleicht nicht mehr dieselben, und wenn doch, dann vielleicht nicht mehr ihre Reihenfolge - aber das Produkt ist stets dasselbe, weil man ja dieselbe Menge von Tupeln abgezählt hat. Manchmal ist eine Reihenfolge "besser" als die anderen.

Die beiden wichtigsten Anwendungen sind die folgenden.

(E.4) Satz. Sei A eine n-elementige Menge, $k \in N$. Dann gibt es genau n^k verschiedene k-Tupel von Elementen aus A.

(E.5) Satz. Sei A eine n-elementige Menge, $k \in N$. Dann gibt es genau $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ verschiedene k-Tupel von paarweise verschiedenen Elementen aus A.

Speziell wenn $k = n$ gilt:

(E.6) Satz. Sei A eine n-elementige Menge. Dann gibt es genau $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene n-Tupel von paarweise verschiedenen Elementen aus A.

ENDE DES EINSCHUBS

Die wichtigste Anwendung der Zählerei sei hier noch einmal wiederholt:

(1.1.13) Satz. Sei $M = \{1,2,..,n\}$ und $k \in N$.
(i) Die Anzahl aller k-Tupel von Elementen aus M ist n^k.
(ii) Die Anzahl aller k-Tupel von (paarweise) verschiedenen Elementen aus M ist gleich $n(n-1)...(n-k+1)$.
(iii) Die Anzahl aller n-Tupel von (paarweise) verschiedenen Elementen aus M ist gleich $n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1$.

Der Spezialfall $n = k$ ist besonders wichtig:

(1.1.14) Definition. Sei $n \geq 1$. Die n-Tupel von (paarweise) verschiedenen Elementen aus der n-elementigen Menge M heißen **Permutationen von M** und die Anzahl $n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1$ wird **n! (n Fakultät)** genannt.

Offenbar gilt $1! = 1$, und $n! = n \cdot (n-1)!$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.
Wir definieren noch $0! := 1$.
Dass wir 0! verwenden können, hat sich in der expliziten Formel für die Binomialkoeffizienten als nützlich erweisen.

Die Größenordnung von n! richtig einzuschätzen, fällt oft schwer. Die Fakultäten wachsen schnell an. Wir werden sie später mit der sogenannten Stirling-Formel abschätzen.

Kommen wir zum Schluß dieses Paragraphen noch einmal auf die Mächtigkeit von Vereinigungen zu sprechen. Wenn die Mengen nicht disjunkt sind, werden die Formeln zusehends komplizierter.

(1.1.15) Satz. Seien A, B, C Mengen. Dann gilt

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

Beweis. Zwei Beweise.
(a) Stelle $A\cup B\cup C$ als Vereinigung $A\cup(B\cup C)$ dar und verwende (1.1.8). Es folgt mit der üblichen Mengenalgebra:

$$|A\cup B\cup C| = |A\cup(B\cup C)| = |A| + |B\cup C| - |A\cap(B\cup C)| =$$
$$|A| + (|B| + |C| - |B\cap C|) - |(A\cap B)\cup(A\cup C)| =$$
$$|A| + |B| + |C| - |B\cap C| - (|A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|) =$$
$$|A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

(b) Andere Methode: Zählen wir einfach los und benutzen die Mächtigkeiten von A, B und C, und ziehen wieder etwas ab, wenn wir Elemente doppelt oder dreifach gezählt haben. Das machen wir solange, bis alle Elemente "richtig", nämlich genau einmal gezählt wurden(bis für jedes Element genau ein Steinchen in der Schale liegt).
Bei $|A| + |B| + |C|$ haben die Elemente, die nur in genau einer der Mengen A, B oder C vorkommen, "richtig" gezählt; diejenigen aus den paarweisen Schnitten aber doppelt (genau zweimal) gezählt. Die Mächtigkeiten der "2-er Schnitte" müssen daher wieder jeweils abgezogen werden. Damit erhalten wir als Formel $|A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C|$, in der alle Elemente der Vereinigung, die in höchstens zwei der drei Mengen enthalten sind, richtig, nämlich genau einmal gezählt sind.
In $|A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C|$ haben wir die Elemente, die in genau einer oder in genau zwei der Mengen A, B oder C vorkommen, "richtig" gezählt, diejenigen aus $A\cap B\cap C$ jedoch dreimal gezählt und dreimal wieder abgezogen, also noch gar nicht gezählt. Ihre Anzahl muß also noch einmal addiert werden, damit auch sie genau einmal gezählt sind. Jetzt bleiben keine Elemente übrig, die "falsch" gezählt wurden, wir sind fertig.

(1.1.16) Korollar. Seien A, B, C Teilmengen einer Menge M. Dann gibt es

$$|M| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

Elemente aus M, die in keiner der drei Mengen liegen.

(1.1.17) Beispiel. Sei $M = \{1,2,...,1000\}$.
(a) Wie viele Zahlen aus M sind weder durch 2 noch durch 5 teilbar?
Setze $A = \{z\in M: z \text{ ist durch 2 teilbar}\}$, $B = \{z\in M: z \text{ ist durch 5 teilbar}\}$. Dann ist offenbar die gesuchte Menge von Zahlen gerade $M - (A\cup B)$. Die gesuchte Anzahl ist somit ($A\cap B$ enthält genau die durch 5 und 2, also durch 10 teilbaren Zahlen):
$|M| - |A| - |B| + |A\cap B| = 1000 - 500 - 200 + 100 = 400$.
(b) Wie viele Zahlen aus M sind weder durch 2 noch durch 3, noch durch 5 teilbar?
Setze $C = \{z\in M: z \text{ ist durch 3 teilbar}\}$. Dann ist offenbar die gesuchte Menge von Zahlen gerade $M - (A\cup B\cup C)$. Die gesuchte Anzahl ist somit gleich:

$$|M| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C| =$$
$$1000 - 500 - 200 - 333 + 100 + 166 + 66 - 33 = 266$$

Die Mächtigkeit von $B\cap C = \{z\in M: z \text{ ist durch 15 teilbar}\}$ z.B. bestimmt man übrigens so:
- entweder teilen und den Rest weglassen, 1000 : 15 = 66 Rest 10

- oder das größte Vielfache von 15 suchen, das ≤ 1000 ist, hier 990, dann sind in M genauso viele Vielfache von 15 wie in {1,2,...,990}, und das sind die Zahlen {15, 30, ..., $66\cdot 15 = 990$}, also 66 Stück.

(c) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1000 gibt es, die weder durch 2 noch durch 5, wohl aber durch 7 teilbar sind?

S sei die Menge der durch 7 teilbaren Zahlen in {1,2,...,1000}. Dann gilt: $|S| = 142$.

Sei X die Menge aller Zahlen zwischen 1 und 1000, die weder durch 2 noch durch 5, wohl aber durch 7 teilbar sind. Dann ist $X = S - [S\cap(A\cup B)]$, also müssen wir

$|S\cap(A\cup B)| = |(S\cap A)\cup(S\cap B)|$ bestimmen.

$|S\cap A|$ = "1000 : 14" = 71, $|S\cap B|$ = "1000 : 35" = 28,

$|S\cap A\cap B|$ = "1000 : 70" = 14; also

$|(S\cap A)\cup(S\cap B)| = 71 + 28 - 14 = 85$, und $|X| = 142 - 85 = 57$.

(1.1.18) Satz (Einschluss-/Ausschlussformel; Siebformel). Seien $A_1, A_2, ..., A_n$ Mengen. Sei für $\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,...,n\}$ mit A_J der Durchschnitt über die Mengen A_j, $j \in J$, bezeichnet. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \;=\; \sum_{J\neq\otimes} |A_J|\cdot(-1)^{|J|-1} \;=\; \sum_{i=1}^{n}|A_i| \;-\; \sum_{i\neq j}\left|A_i\cap A_j\right| \;+\; \sum_{i,j,k}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| - + \ldots$$

Beweis. Zwei Beweise.

(a) **Induktion.** Die Verankerung ist klar. Der Induktionsschritt ist leicht unübersichtlich:

Wir schreiben $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}$ und wenden Mengenalgebra an.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\cap A_{n+1}\right| =$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i\cap A_{n+1})\right|$$

Nun können wir die Induktionsannahme anwenden, denn es handelt sich nun um Vereinigungen über jeweils n Teilmengen. (Die Schnitte über Teilmengen J ohne den Index n+1 kommen in der Formel der ersten Summanden vor, die mit dem Index n im zweiten Summanden; das ist noch etwas Rechnerei.)

(b) **Andere Methode**: Überprüfen wir einfach, ob in der Formel auf der rechten Seite alle Elemente "richtig", nämlich genau einmal gezählt wurden (ob für jedes Element genau ein Steinchen in der Schale liegt). Und zwar betrachten wir die Elemente in den Gruppen, die in der Formel vorkommen: jeden Schnitt A_J einzeln.

Schauen wir, ob wir die Elemente aus A_J, die in keinen weiteren Mengen A_k, $k \notin J$, liegen, richtig oft (nämlich genau einmal) gezählt haben.

Sei $|J| = m$. Dann kommen die Elemente von A_J in den $m = \binom{m}{1}$ Teilmengen selbst vor – da haben sie jeweils ein (positives) Steinchen bekommen.

Dann kommen die Elemente von A_J in den $\binom{m}{2}$ Schnitten von je zwei der Teilmengen vor – da haben sie je ein negatives Steinchen bekommen (nämlich eines weggenommen bekommen).
So geht das weiter – sie kommen in $\binom{m}{k}$ Schnitten von je k der Teilmengen vor – da haben sie jeweils ein Steinchen mit dem Vorzeichen $(-1)^{k-1}$ bekommen.
Insgesamt haben diese Elemente genau

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\cdot(-1)^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot(-1)^k\cdot 1^{m-k} + 1 = (-1+1)^m + 1 = 0 + 1 = 1$$

Steinchen bekommen, wurden also genau einmal gezählt.

Das ist eine Anwendung des **Binomialsatzes**. (siehe nächster Abschnitt).

Übrigens: obwohl es blödsinnig wäre, bei obiger Vereinigung dieselbe Menge mehrmals hinzuschreiben - es sieht sogar so aus, als seien die Menge A_i alle als verschieden vorausgesetzt - ist der Fall, dass manche gleich sind, nicht ausgeschlossen. Das ist insbesondere dann nützlich, wenn man die einzelnen Mengen A_i nicht (oder nicht gut) kennt. Der Satz gilt trotzdem.