Unterrichtsmitschrift aus dem Mathe-LK

# Stochastik

Tobias Wichtrey, tobias@tarphos.de

13. April 2004

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I.

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

# 1. Zufallsexperimente

- Würfelwurf
- Münzwurf
- Ziehen aus einer Urne
- Drehen eines Glücksrades
- Austeilen von Karten
- Messungen (z. B. Fallbeschleunigung)
- Qualitäskontrollen

# 2. Ergebnisräume

z. B. Werfen eines Würfels

$$\begin{array}{lcl} \Omega_1 & = & \{1;2;3;4;5;6\} \\ \Omega_2 & = & \{6;\overline{6}\} \\ \Omega_3 & = & \{\text{gerade};\text{ungerade}\} \\ \Omega_1 & \to & \Omega_2 : \text{ Vergröberung} \\ \Omega_2 & \to & \Omega_1 : \text{ Verfeinerung} \end{array}$$

Jedem Ausgang eines Experiments darf nicht mehr als ein Element von $\Omega$ zugeordnet werden.

**Definition:** Eine Menge $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$ heißt *Ergebnisraum* eines Zufallsexperiments, wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein $\omega_i$ zugeordnet ist. Die $\omega_i$ heißen *Ergebnisse* des Zufallsexperiments.

**Beispiel:** $\Omega = \{0;1\}$

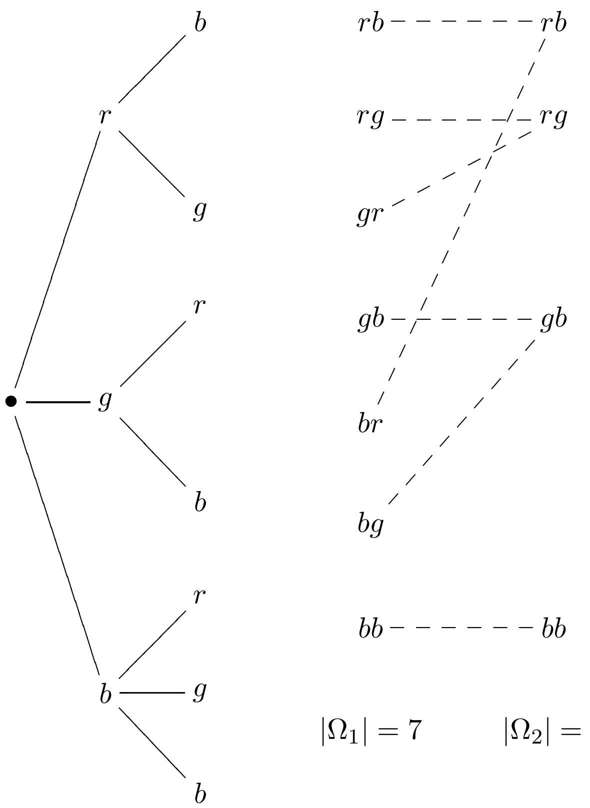
- Münzwurf
- Qualitätskontrolle
- Lose ziehen (Niete – Treffer)

## 2.1. Mehrstufige Zufallsexperimente

### 2.1.1. Zweimaliges Ziehen

#### ohne Zurücklegen

In einer Urne befinden sich eine rote, zwei gelbe und zwei rote Kugeln.

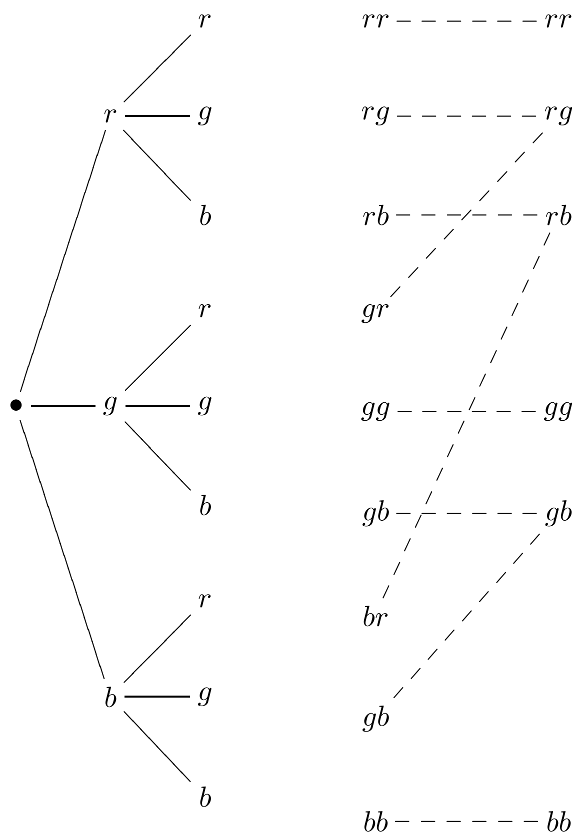



$|\Omega_1| = 7 \qquad |\Omega_2| = 4$

($\Omega_1$ mit und $\Omega_2$ ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

### mit Zurücklegen

In einer Urne befinden sich eine rote, zwei gelbe und zwei rote Kugeln.




$$|\Omega_1| = 9 \qquad |\Omega_2| = 6$$

($\Omega_1$ mit und $\Omega_2$ ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

### 2.1.2. Gleichzeitiges Werfen von 3 Würfeln

$\rightarrow$ dreimaliges Werfen eines Würfels

Ergebnisse: $\underbrace{(\omega_1|\omega_2|\omega_3)}_{\text{1., 2., 3. Wurf}}$ $\quad \Omega = \{(1|1|1), (1|1|2) \dots\}$

Die Ergebnisse eines n-stufigen Zufallsexperiments sind n-Tupel $(\omega_1|\omega_2| \dots |\omega_n)$, wobei $\omega_i$ irgendein Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist. $\Omega$ ist dann die Menge aller dieser n-Tupel. Jedes n-Tupel stellt genau einen Pfad im Baumdiagramm dar.

# 3. Das Zählprinzip

## 3.1. Rennquintett

Beim Rennquintett „$2 \times 3$ aus $15$ “ muß man von den 15 startenden Pferden die ersten drei nach der Reihenfolge ihres Einlaufs ins Ziel ankreuzen. Wir beschränken uns auf Rennen A. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Wettschein auszufüllen? [1]

$|\Omega| = 15 \cdot 14 \cdot 13$

## 3.2. Verteilung von 6 Karten an 3 Spieler

$|\Omega| = 15 \cdot 6 \cdot 1$

## 3.3. Urne aus Kapitel 2.1.1 ohne Zurücklegen

$|\Omega| = 3 + 2 + 2$

[1] aus: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz. Bayerischer Schulbuch Verlag. München 1997. (Seite 18)

# 4. Ereignisräume

**Definition:**

1. Jede Teilmenge eines endlichen Ergebnisraums $\Omega$ heißt Ereignis.
2. Das Ereignis $A$ tritt genau dann ein, wenn ein $\omega$ als Versuchsergebnis vorliegt, das in $A$ enthalten ist.
3. Die Menge aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

## 4.1. Besondere Ereignisse

$\{\} = \emptyset$ unmögliches Ereignis

$\Omega$ sicheres Ereignis

$\{\omega\}$ Elementarereignis

$$A = \bigcup_{\omega_i \in A} \omega_i$$

## 4.2. Ereignisalgebra

| | | |
|---|---|---|
| $A \subset B$ | | $A$ zieht $B$ nach sich.[1] |
| $\overline{A}$ | „nicht $A$“ | $A$ tritt nicht ein. |
| $A \cup B$ | „$A$ oder $B$“ | $A$ oder auch $B$ tritt ein. |
| $A \cap B$ | „$A$ und $B$“ | $A$ und $B$ treten zugleich ein. |
| $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ | „nicht $A$ und nicht $B$“ | Keines der beiden Ereignisse tritt ein. |
| $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ | „nicht $A$ oder nicht $B$“ | Höchstens eines der Ereignisse tritt ein. |
| $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ | „entweder $A$ oder $B$“ | Genau eines der Ereignisse tritt ein. |
| $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ | | Alle Ereignisse treten ein. |
| $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ | | Mindestens ein Ereignis tritt ein. |

[1] Zwei Ereignisse sind genau dann gleich, wenn gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

## 4.3. Rechengesetze

| | |
|---|---|
| Kommutativgesetze | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativgesetze | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Distributivgesetze | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| Gesetze für die neutralen Elemente | $A \cup \emptyset = A$ |
| | $A \cap \Omega = A$ |
| Gesetze für die dominanten Elemente | $A \cup \Omega = \Omega$ |
| | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| Gesetze für das komplementäre Element | $A \cup \overline{A} = \Omega$ |
| | $A \cup \overline{A} = \emptyset$ |
| Idempotenzgesetze | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap A = A$ |
| Absorptionsgesetze | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| Gesetze von de Morgan | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |

**Definition:**

1. Die Ereignisse $A$ und $B$ heißen *unvereinbar (disjunkt)*, wenn $A \cap B = \emptyset$.
2. Die Ereignisse $A_1 \ldots A_n$ heißen *paarweise disjunkt*, wenn je zwei disjunkt sind.
3. Eine Menge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1 \ldots A_n$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$ heißt *Zerlegung von $A$*.

# 5. Die relative Häufigkeit

**Beispiel:** Roulette

1. Dutzend: $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$
absolute Häufigkeit: $k(A) = 127$
371 Spiele
relative Häufigkeit: $h_{371}(A) = \frac{127}{371} = 0{,}34 = 34\%$

**Definition:** Tritt ein Ereignis $A$ bei $n$ Versuchen $k$-mal ein, so heißt $h_n(A) = \frac{k(A)}{n}$ die *relative Häufigkeit* des Ereignisses $A$

Die relative Häufigkeit stabilisiert sich bei zunehmender Versuchszahl um einen festen Wert (empirisches Gesetz der großen Zahlen).

## 5.1. Eigenschaften der relativen Häufigkeit

$0 \leq k \leq n; \quad 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$

$$0 \leq h_n(A) \leq 1$$

$$h_n(A) = \sum_{\omega \in A} h_n(\{\omega\})$$

$$h_n(\emptyset) = 0$$

$$h_n(\Omega) = 1$$

$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$$

$$A, B \text{ unvereinbar: } h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$$

## 5.2. Die Vierfeldertafel

**Beispiel:**

62101400 Einwohner
29713800 männlich, davon 20002000 volljährig
insgesamt 43151600 volljährig

$M$: männlich; $W$: weiblich
$V$: volljährig; $\overline{V}$: nicht volljährig

Gesucht: $h(V \cup W), h(W \cap \overline{V})$

$h(V) = \frac{43151600}{62101400} = 69{,}5\%$, $h(M) = \frac{29713800}{62101400} = 47{,}8\%$, $h(W \cap V) = \frac{20002000}{62101400} = 32{,}2\%$

| | $V$ | $\overline{V}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | 32,2% | 15,6% | 47,8% |
| $W$ | 37,3% | 14,9% | 52,2% |
| | 69,5% | 30,5% | |

$h(V \cup W) = 84{,}4\%$ $h(W \cup \overline{V}) = 14{,}9\%$

**Allgemein:**

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $h(A \cap B)$ | $h(\overline{A} \cap B)$ | h(B) |
| $\overline{B}$ | $h(A \cap \overline{B})$ | $h(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $h(\overline{B})$ |
| | $h(A)$ | $h(\overline{A})$ | |

# 6. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

## 6.1. Laplace-Wahrscheinlichkeit und -Experimente

Wird jedem Elementarereignis aus $\Omega$ mit entlich vielen Ergebnissen *die gleiche* Wahrscheinlichkeit zugeordnet, so gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Elementarereignisse}}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|Q|}$$

Ein Experiment heißt *Laplace-Experiment,* wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

**Beispiel:** Würfeln

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

## 6.2. Folgerungen

$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$ falls $P(A_1) + \cdots + P(A_n)$ eine Zerlegung von $A$ bilden.

## 6.3. Beispiele

### 6.3.1. Münzwurf mit zwei nicht unterscheidbaren Münzen

$A$: „mindestens einmal Wappen“
$\Omega = \{WW, WZ, ZW, ZZ\}$
$P(A) = \frac{3}{4} = 75\%$

### 6.3.2. Würfelwurf mit zwei Würfeln

$A$: „Mindestens eine Sechs“
$B$: „höchstens eine Sechs“
$C$: „Augensumme mindestens zehn“

$$\Omega = \{ \begin{array}{cccc} (1|1) & (1|2) & \cdots & (1|6) \\ (2|1) & (2|2) & \cdots & (2|6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6|1) & \cdots & \cdots & (6|6) \end{array} \}$$

$|\Omega| = 36$

$P(A) = \frac{11}{36}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

### 6.3.3. Urne

In einer Urne befinden sich eine rote, zwei gelbe und zwei rote Kugeln.
$A$: „einmal grün und einmal blau“

#### ohne Zurücklegen

$$\Omega = \begin{array}{llll} \{\{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, \\ & \{2,3\}, & \{\mathbf{2},\mathbf{4}\}, & \{\mathbf{2},\mathbf{5}\}, \\ & & \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}, & \{\mathbf{3},\mathbf{5}\}, \\ & & & \{4,5\}\} \end{array}$$

$|\Omega| = 10$

$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

#### mit Zurücklegen

$$\Omega = \begin{array}{lllll} \{\{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, \\ \{2,1\}, & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{\mathbf{2},\mathbf{4}\}, & \{\mathbf{2},\mathbf{5}\}, \\ \{3,1\}, & \{3,2\}, & \{3,3\}, & \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}, & \{\mathbf{3},\mathbf{5}\}, \\ \{4,1\}, & \{\mathbf{4},\mathbf{2}\}, & \{\mathbf{4},\mathbf{3}\}, & \{4,4\}, & \{4,5\}, \\ \{5,1\}, & \{\mathbf{5},\mathbf{2}\}, & \{\mathbf{5},\mathbf{3}\}, & \{5,4\}, & \{5,5\}\} \end{array}$$

$|\Omega| = 25$

$P(A) = \frac{8}{25}$

# 7. Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff

Richard v. Mises:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(A) = P(A)$$

Problem: Existenz des Grenzwerts

# 8. Der axiomatische Wahrscheinlichkeitsbegriff

1933 Kolmogorov

**Definition:** Eine Funktion $P : A \mapsto P(A)$, die jedem Ereignis aus dem Ereignisraum eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet, heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

**Axiom I:** $P(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)

**Axiom II:** $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)

**Axiom III:** $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additivität)

Das Paar $(\Omega, P)$ heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*.

| <u>Wirklichkeit</u> | <u>Modell</u> |
|---|---|
| Zufallsexperiment | $(\Omega, P)$ |
| $\downarrow$ Experiment | $\downarrow$ Rechnung |
| $h_n(A)$ | $P(A)$ |

**Folgerungen:**

$\Omega = A \cup \overline{A}$

$P(\Omega) = 1 = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$\Rightarrow \underbrace{P(\Omega)}_{=1} + P(\emptyset) = 1$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned} A &\subseteq B \\ B &= A \cup (B \cap \overline{A}) \\ P(B) &= P(A) + \underbrace{P(B \cap \overline{A})}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Vereinbare Ereignisse $A, B$

$$\begin{array}{rclrcl} A \cup B & = & A \cup (\overline{A} \cap B) & \quad P(A \cup B) & = & P(A) + P(\overline{A} \cap B) \\ B & = & (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) & \quad P(B) & = & P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \end{array}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise unvereinbar, so gilt: $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

# 9. Kombinatorik

## 9.1. Anzahl der $k$-Tupel aus einer $n$-Menge

**Beispiel:** 11er-Wette

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. Spiel: | 3 Möglichkeiten | mögliches Ergebnis: | $(2\|1\|0\|0\|1\|1\|1\|1\|0\|1\|1)$ |
| 2. Spiel: | 3 Möglichkeiten | | 11-Tupel aus 3-Menge |
| ... | | | |
| 11. Spiel: | 3 Möglichkeiten | | |
| Insgesamt: | $3^{11} = 177147$ Möglichkeiten | | |

**Satz:** Die Anzahl der $k$-Tupel aus einer n-Menge ist $n^k$.

**Beispiel:** Zahlenschloß mit 5 Stellen

$|\Omega| = 10^5$

## 9.2. Anzahl der Permutationen einer $n$-Menge

**Beispiel:** Sitzordnung von 10 Personen

| | |
|---|---|
| 1. Platz: | 10 Möglichkeiten |
| 2. Platz: | 9 Möglichkeiten |
| ... | |
| 11. Platz: | 1 Möglichkeit |
| Insgesamt: | $10 \cdot 9 \cdots 1 = 10! = 3628800$ Möglichkeiten |

**Definition:** Ein $n$-Tupel mit $n$ verschiedenen Elementen aus einer $n$-Menge heißt *Permutation einer $n$-Menge*.

**Satz:** Die Anzahl der Permutationen aus einer $n$-Menge ist $n!$.

$$0! = 1$$

## 9.3. Anzahl der $k$-Permutationen einer $n$-Menge

**Beispiel:** Pferde-Toto – die ersten drei Pferde (von 18) in richtiger Reihenfolge tippen

| | |
|---|---|
| 1. Platz: | 18 Möglichkeiten |
| 2. Platz: | 17 Möglichkeiten |
| 3. Platz: | 16 Möglichkeiten |
| Insgesamt: | $18 \cdot 17 \cdot 16 = \frac{18!}{15!}$ Möglichkeiten |

**Definition:** Ein $k$-Tupel mit $k$ verschiedenen ELementen aus einer $n$-Menge heißt *$k$-Permutation aus einer $n$-Menge*.

**Sonderfall:** $k = n$ siehe 9.2

$\frac{n!}{0!} = n!$

## 9.4. Anzahl der $k$-Teilmengen einer $n$-Menge

**Beispiel:** Pferde-Lotto – die ersten vier Pferde (von 18) in beliebiger Reihenfolge tippen

$\frac{\text{Anzahl der 4-Permutationen einer 18-Menge}}{\text{Anzahl der Permutationen einer 4-Menge}} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{4!} = \frac{18!}{14!4!} := \binom{18}{4}$ „4 aus 18"

**Verallgemeinerung:**

$\frac{\text{Anzahl der } k\text{-Permutationen einer } n\text{-Menge}}{\text{Anzahl der Permutationen einer } k\text{-Menge}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} := \binom{n}{k}$ „k aus n"

**Satz:** Die Anzahl der $k$-Teilmengen aus einer $n$-Menge ist $\frac{n!}{k!(n-k)!} := \binom{n}{k}$ mit $n \in \mathbf{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$

**Beispiel:** Lotto „6 aus 49"

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13983816$

## 9.5. Anzahl der $k$-Permutationen aus einer $n$-Menge mit Wiederholung

**Beispiel:** Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes Mississippi anordnen, so daß neue Wörter entstehen?

| | DONAU | | MISSISSIPPI |
|---|---|---|---|
| D: | 5 mögliche Plätze | M: | $\binom{11}{1}$ mögliche Plätze |
| O: | 4 mögliche Plätze | I: | $\binom{10}{4}$ mögliche Plätze |
| | ... | S: | $\binom{6}{4}$ mögliche Plätze |
| | | P: | $\binom{2}{2}$ mögliche Plätze |
| | $\lvert\Omega\rvert = 5!$ | | $\lvert\Omega\rvert = \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{11!}{1!10!} \cdot \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{2!}{2!0!} = \frac{11!}{4!4!2!}$ |

**Satz:** Besteht ein $n$-Tupel aus $k$ verschiedenen Elementen, die $n_1$-, $n_2$-, $\ldots$, $n_k$-mal vorkommen, mit $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, so gibt es $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ verschiedene $n$-Tupel.

## 9.6. Rechnen mit Binomialkoeffizienten

**Definition:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ heißt *Binomialkoeffizient.*

**Pascal'sches Dreieck**

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \dots & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

**Symmetriegesetz:** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

**Additionsgesetz:** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

**Beweis:** $\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!+n \cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$

**Allgemeine binomische Formel:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \qquad n \in \mathbf{N}$$

## 9.7. Anzahl der $k$-Kombinationen aus einer $n$-Menge

**Definition:** Eine Zusammenstellung von $k$ Elementen $a_i$ aus einer $n$-Menge mit $k \lesseqgtr n$, bei der es *nicht* auf die Reihenfolge ankommt und bei der auch alle möglichen Wiederholungen der $a_i$ zugelassen sind, heißt *$k$-Kombination aus einer $n$-Menge*.[1]

**Satz:** Die Anzahl der $k$-Kombinationen aus einer $n$-Menge ist $\binom{n+k-1}{k}$.

**Beispiel:** Gleichzeitiges Werfen von drei nicht unterscheidbaren Würfeln
$|\Omega| = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$

## 9.8. Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Kombinatorik

### 9.8.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter $k$ zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

$|\Omega| = 365^k$
$A$: „Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen.“
$\overline{A}$: „Alle Geburtstage sind verschieden.“

[1] aus: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz. Bayerischer Schulbuch Verlag. München 1997. (Seite 92)

$|\overline{A}| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-k+1) = \frac{365!}{(365-k)!} \quad k \leq 365$
$P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-k)!}$

| $k$ | $P(A)$ |
|---|---|
| 20 | 41% |
| 23 | 51% |
| 30 | 71% |

### 9.8.2. Schafkopf

$A$: „Einer der vier Spieler erhält einen ‚Sie'"
$P(A) = \frac{1}{\binom{32}{8}} \cdot 4 = \frac{1}{2629575}$
$B$: „Ein Spieler bekommt alle Asse."
$P(B) = \frac{\binom{28}{4} \cdot 4}{\binom{32}{8}} = \frac{7}{899} = 0,8\%$

### 9.8.3. Lotto

$A_k$: „genau $k$ Richtige"
$P(A_k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$

$$\begin{aligned}
P(A_0) &= 43,6\% \\
P(A_1) &= 41,3\% \\
P(A_2) &= 13,2\% \\
P(A_3) &= 1,8\% \\
P(A_4) &= 0,1\% \\
P(A_5) &= 1,8 \cdot 10^{-5} \\
P(A_6) &= 7,2 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$

$B$: „5 Richtige $+$ Zusatzzahl"
$|\Omega| = \binom{49}{6} \cdot \binom{43}{1}$
$|B| = \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}$
$P(B) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}\binom{42}{1}} = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} = 4,3 \cdot 10^{-7}$

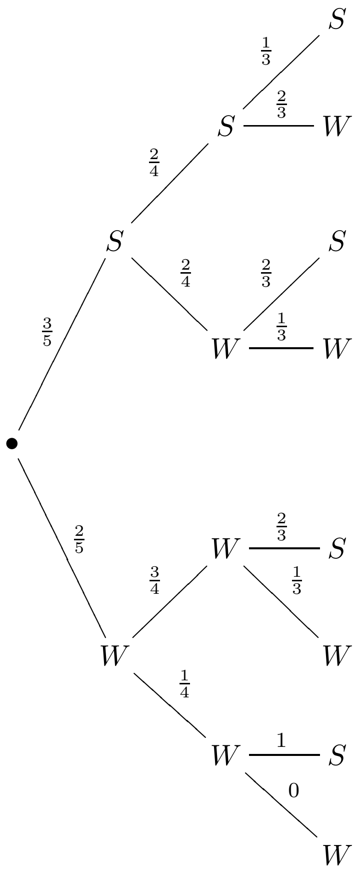
## 9.9. Das alternative Urnenmodell

| | | |
|---|---|---|
| Urne enthält $N$ Kugeln: | $K$ | Kugeln schwarz |
| | $N-K$ | Kugeln weiß |
| Ziehen von $n$ Kugeln: | $k$ | schwarz |
| | $n-k$ | weiß |

**Gesucht:** Wahrscheinlichkeit, daß in der Stichprobe genau $k$ schwarze Kugeln sind.
$P(X=k)$

**Zahlenbeispiel:**
$$\begin{aligned} N &= 5 \\ K &= 3 \\ n &= 3 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

- ohne Zurücklegen
  - nacheinander
    - $*$ Baumdiagramm




$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$

$$P(X=2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

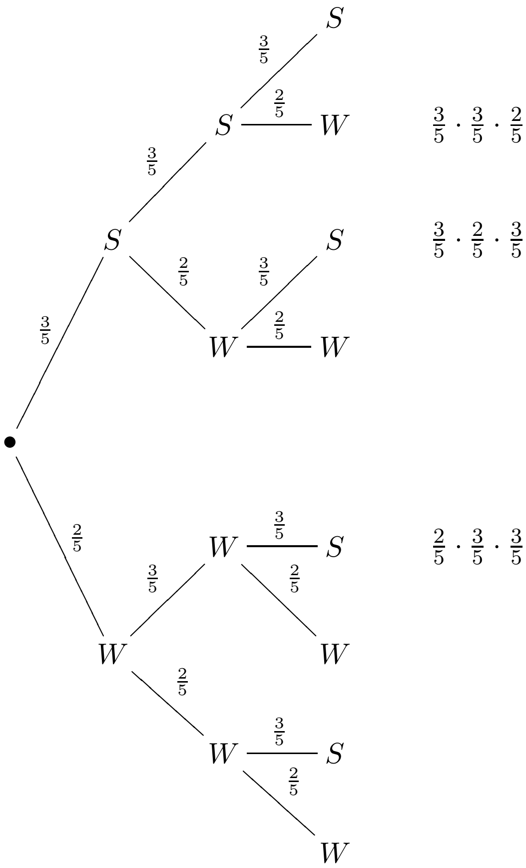
- $*$ Kombinatorik

$$\begin{aligned} |\Omega| &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ |A| &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ P(X=2) &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

  - gleichzeitig

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \binom{5}{3} \\ |A| &= \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} \\ P(X=2) &= \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

- mit Zurücklegen
  - Baumdiagramm




$$P(X=2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = 3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{54}{125} = 0{,}432$$

  - Kombinatorik

$$\begin{aligned} |\Omega| &= 5^3 \\ |A| &= 3\cdot 3\cdot 2\cdot\binom{3}{2} \\ P(X=2) &= \frac{3\cdot3\cdot2}{5\cdot5\cdot5}\cdot\binom{3}{2} = 0{,}432 \end{aligned}$$

**Verallgemeinerung:**

ohne Zurücklegen

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

mit Zurücklegen

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\underbrace{\left(\frac{K}{N}\right)}_{p}^{k}\underbrace{\left(\frac{N-K}{N}\right)}_{q}^{n-k}$$

$p$: Anzahl der schwarzen Kugeln
$q$: Anzahl der weißen Kugeln

# 10. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

**Beispiel:** Bundestagswahl 1998

$By$: Bayern
$S$: SPD

| | $S$ | $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| $By$ | 2,4 | 4,6 | 7,0 Mio |
| $\overline{By}$ | 17,8 | 24,5 | 42,3 Mio |
| | 20,2 | 29,1 | 49,3 Mio |

$$\begin{aligned} P(By) &= 14{,}2\% \\ P(S) &= 41{,}0\% \\ P(By \cap S) &= 4{,}87\% \end{aligned}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Wähler SPD gewählt, wenn man weiß, daß er aus Bayern kommt?

$$\begin{aligned} P_{By}(S) &= \tfrac{2{,}4}{7{,}0} = 34{,}3\% \\ P_{By}(S) &= \tfrac{|S\cap By|}{|By|} = \tfrac{|S\cap By|}{|\Omega|} \cdot \tfrac{|\Omega|}{|By|} = \underbrace{\frac{|S \cap By|}{|\Omega|}}_{P(S\cap By)} \div \underbrace{\frac{|By|}{|\Omega|}}_{P(By)} = \tfrac{P(S\cap By)}{P(By)} = 34{,}3\% \end{aligned}$$

**Definition:** $A$ und $B$ seien Ereignisse in $(\Omega, P)$ mit $P(A) > 0$.
Dann heißt $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ *bedingte Wahrscheinlichkeit* von $B$ unter der Bedingung $A$.

## 10.1. Axiome von Kolmogorov

Ist $P_A$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß? (siehe 8)

I $\quad P_A(B) = \frac{\overbrace{P(A\cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(A)}_{>0}} \geq 0$ $\qquad$ ($\Rightarrow$ Nichtnegativität)

II $\quad P_A(\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ $\qquad$ ($\Rightarrow$ Normierung)

III $\quad B \cap C = \emptyset$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; P_A(B\cup C) &= \tfrac{P(A\cap(B\cup C))}{P(A)} = \tfrac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(A)} = \qquad (\Rightarrow \text{Additivität}) \\ &= \tfrac{P(A\cap B)}{P(A)} + \tfrac{P(A\cap C)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rechenregeln:
$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$
$P_A(B\cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B\cap C)$

**Beispiel:** Lotto

$A$: „die ersten 4 gezogenen Zahlen sind richtig“
$B$: „6 Richtige“

Gesucht: $P_A(B)$

$P(A) = \frac{\binom{2}{0}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = 7{,}0796 \cdot 10^{-5}$

## 10.2. Multiplikationsregel

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$
$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

**Beispiel:** Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden nacheinander zwei Karten gezogen.

$A_1$: „As beim 1. Zug“ $A_2$: „As beim 2. Zug“

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{3}{32} \cdot \frac{3}{31} = 1{,}2\%$

Kombinatorisch: $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = 1{,}2\%$

**drei Ereignisse:** $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P_{A\cap B}(C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C)$

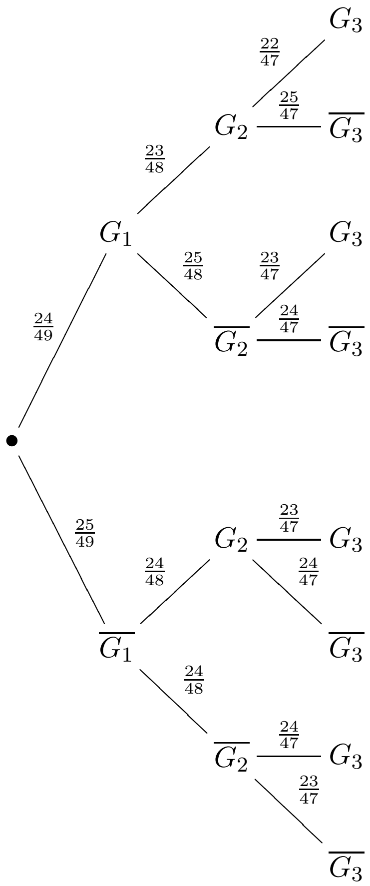
**mehr als drei Ereignisse:**

**Beispiel:** Lotto

$A_1$: Die 1. gezogene Zahl ist eine der angekreuzten.
$A_2$: Die 2. gezogene Zahl ist eine der angekreuzten.
$\ldots$
$P(A_1) = \frac{6}{49}$
$P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{48}$
$P_{A_1\cap A_2}(A_3) = \frac{4}{47}$
$\vdots$
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdots \frac{1}{44} = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$

## 10.3. Baumdiagramme

**Lotto:** $G_1$: „Die 1. gezogene Zahl ist gerade.“
$G_2$: „Die 2. gezogene Zahl ist gerade.“
$G_3$: „Die 3. gezogene Zahl ist gerade.“

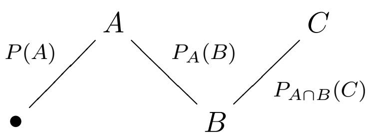



$P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{49 \cdot 48 \cdot 47}$
$P(G_1) = \frac{24}{49} = 0{,}49$
$P(G_2) = \frac{24 \cdot 23}{49 \cdot 48} + \frac{25 \cdot 24}{49 \cdot 48} = 0{,}49$
$P(G_3) = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{49 \cdot 48 \cdot 47} + \frac{24 \cdot 25 \cdot 23}{49 \cdot 48 \cdot 47} + \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{49 \cdot 48 \cdot 47} + \frac{25 \cdot 24 \cdot 24}{49 \cdot 48 \cdot 47} = 0{,}49$

### 10.3.1. Verzweigungsregeln

- Alle von einem Verzweigungspunkt ausgehenden Zweige tragen Wahrscheinlichkeiten, deren Summe 1 ist.

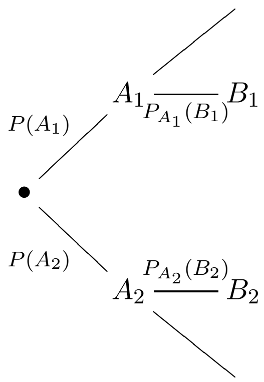
- 1. Pfadregel




$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C)$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment im zugehörigen Baumdiagramm ein bestimmter Pfad durchlaufen wird, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

- 2. Pfadregel




$P(B_1 \cup B_2) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B_1) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B_2)$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die im Baumdiagramm zu dem Ereignis hinführen.

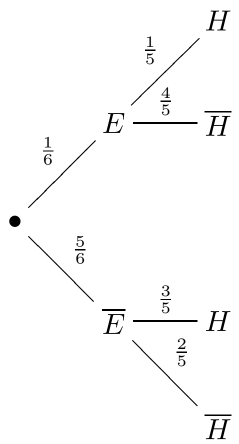
## 10.4. Die Formel von Bayes

**Beispiel:** In einem Ferienort in Oberbayern leben während der Hochsaison 5x soviele Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen einen Trachtenhut, aber nur jeder 5. Einheimische. Auf der Straße begegnet uns ein Mensch mit Trachtenhut.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Einheimischer?

**Gegeben:** $P(E) = \frac{1}{6}$; $P_E(H) = \frac{1}{5}$; $P_{\overline{E}}(H) = \frac{3}{5}$
**Gesucht:** $P_H(E)$

$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$

1. Baum




$P_H(E) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1}{16}$

2. Vierfeldertafel

| | $E$ | $\overline{E}$ | |
|---|---|---|---|
| $H$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{15}{30}$ | $\frac{16}{30}$ |
| $\overline{H}$ | $\frac{4}{30}$ | $\frac{10}{30}$ | $\frac{14}{30}$ |
| | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $1$ |

$P_H(E) = \frac{P(E\cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{1}{16}$

3. Rechnung

$P_H(E) = \frac{P(E\cap H)}{P(H)} = \frac{P(E)\cdot P_E(H)}{P(E\cap H)+P(\overline{E}\cap H)} = \frac{P(E)\cdot P_E(H)}{P(E)\cdot P_E(H)+P(\overline{E})\cdot P_{\overline{E}}(H)} = \frac{1}{16}$

**Formel von Bayes** (für zwei Ereignisse)

$A$ und $B$ seine Ereignisse in $(\Omega, P)$ mit $P(B) > 0$. Dann gilt:

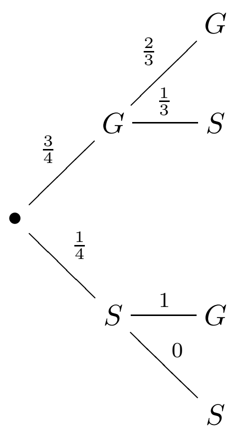
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{\underbrace{P(A)\cdot P_A(B) + P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)}_{\text{totale Wahrscheinlichkeit von } B}}$$

$$P_B(A) = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit des Pfades über } A \text{ nach } B}{\text{Summe der Wahrscheinlichkeiten beider Pfade nach } B}$$

**Beispiel:** Kästchenproblem von Bertrand

| | |
|---|---|
| G | G |
| G | S |

**Gesucht:** $P_G(S)$




$P_G(S) = \frac{P(S\cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1} = \frac{1}{3}$

# 11. Unabhängigkeit von Ereignissen

**Beispiel:**

| | bestanden | nicht bestanden | |
|---|---|---|---|
| Raucher | 10 | 30 | 40 |
| Nichtraucher | 55 | 5 | 60 |
| | 65 | 35 | |

$$\begin{aligned} P(B) &= \tfrac{65}{100} = 0{,}65 \\ P_R(B) &= \tfrac{10}{40} = 0{,}25 \\ P_{\overline{R}}(B) &= \tfrac{55}{60} = 0{,}914 \end{aligned}$$

Ohne Abhängigkeit zwischen den Ereignissen $R$ und $B$ müßte gelten: $P(B) =$

I. $P(B) = P_R(B) = \frac{P(R\cap B)}{P(R)} \Leftrightarrow P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$

II. $P(B) = P_{\overline{R}}(B) = \frac{P(\overline{R}\cap B)}{P(\overline{R})} \Leftrightarrow P(\overline{R} \cap B) = P(\overline{R}) \cdot P(B)$

**Definition:** Zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißen *stochastisch unabhängig*, wenn gilt: $P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Sonst heißen sie *stochastisch unabhängig*.

**Beispiele:**

1. Würfeln mit 2 Würfeln
   $A$: Augenzahl beim 1. Würfel kleiner als 4
   $B$: Augenzahl beim 2. Würfel größer als 4
   $$\begin{aligned} P(A) &= \tfrac{18}{36} = \tfrac{1}{2} \\ P(B) &= \tfrac{12}{36} = \tfrac{1}{3} \\ P(A \cap B) &= \tfrac{6}{36} = \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$
   $\Rightarrow A$, $B$ stochastisch unabhängig
2. Bauteile $B_1$ und $B_2$
   $A_1$: $B_1$ intakt
   $A_2$: $B_2$ intakt
   $A_1$, $A_2$ stochastisch unabhängig
   a) Serienschaltung
      $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$
   b) Parallelschaltung
      $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)$
3. Münz-Paradoxon[1]

[1] aus: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz. Bayerischer Schulbuch Verlag. München 1997. (Seite 137)

a) Zwei normale Münzen werden geworfen. $A$ sei das Ereignis: „Höchstens einmal Zahl“, $B$ das Ereignis: „Jede Seite wenigstens einmal“. Sind $B$ und $B$ unabhängig?
Ein geeigneter Ergebnisraum ist $\Omega = ZZ, ZW, WZ, WW$.
$A = ZW, WZ, WW \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$,
$B = ZW, WZ \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
$A \cap B = ZW, WZ \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
$\frac{1}{2} = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
$A$ und $B$ sind also abhängig.

b) Drei normale Münzen werden geworfen. $A$ und $B$ seien die gleichen Ereignisse wie bei 3a. Sind $A$ und $B$ abhängig oder unabhängig?
Ergebnisraum $\Omega = ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZWW, WZW, WWZ, WWW$.
$A = ZWW, WZW, WWZ, WWW \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,
$B = ZZW, ZWZ, WZZ, ZWW, WZW, WWZ \Rightarrow P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$,
$A \cap B = ZWW, WZW, WWZ \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}$,
$\frac{3}{8} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.
$A$ und $B$ sind jetzt seltsamerweise unabhängig.

## 11.1. Folgerungen aus Unabhängigkeit von $A$ und $B$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$$

$$A, B \text{ unabhängig} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A}, B & \text{unabhängig} \\ A, \overline{B} & \text{unabhängig} \\ \overline{A}, \overline{B} & \text{unabhängig} \end{cases}$$

## 11.2. Wechselbeziehungen

1. $A, B$ unvereinbar $\quad\Rightarrow\quad$ $A, B$ abhängig
   $(A \cap B = \emptyset)$
2. $A, B$ unabhängig $\quad\Rightarrow\quad$ $A, B$ vereinbar

## 11.3. Unabhängigkeit von drei und mehr Ereignissen

**Beispiel:** zweimaliger Münzwurf

$A = KZ; KZ \quad B = KK; ZW \quad CKZ; ZK$

- $A$ und $B$ unabhängig
- $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{4} \rightarrow A$ und $C$ unabhängig
- $B \cap C$ unabhängig

$\rightarrow$ paarweise unabhängig

$P(A \cap (B \cap C)) = 0 \neq \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(B \cap C)}_{\frac{1}{4}}$

Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt *nicht* totale Unabhängigkeit.

**Definition:** Drei Ereignisse $A, B, C$ heißen *stochastisch unabhängig* in $(\Omega, P)$, wenn folgende Multiplikationsregeln gelten:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Sonst heißen sie *stochastisch abhängig*.

**Satz:** Sind die Ereignisse $A, B, C$ unabhängig in $(\Omega, P)$, so gilt dies auch für $A, B, \overline{C}$, für $A, \overline{B}, C$,für $\overline{A}, B, C$,für $A, \overline{B}, \overline{C}$,für $\overline{A}, B, \overline{C}$,für $\overline{A}, \overline{B}, C$, für $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.[2]

[2]aus: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz. Bayerischer Schulbuch Verlag. München 1997. (Seite 143)

# 12. Zufallsgrößen

## 12.1. Einführungsbeispiel: „Chuck a luck“

1 € Einsatz, 3 Würfel, Glückszahl

Glückszahl mindestens einmal $\rightarrow$ Einsatz zurück und 1 € für jeden Würfel, der die Glückszahl zeigt.

mögliche Gewinne: $\{-1; 1; 2; 3\}$

$\Omega = \{(a|b|c)|1 \leq a, b, c \leq 6\}$

$|\Omega| = 6^3 = 216$

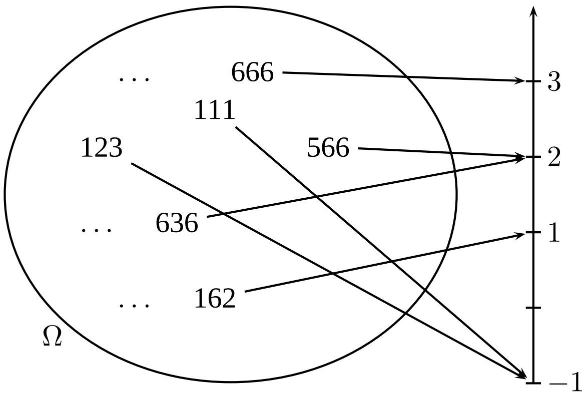



Abbildung 12.1.: Funktion $X : \omega \mapsto X(\omega)$

Funktion $X : \omega \mapsto X(\omega) \quad \mathbf{D}_X = \Omega \quad \mathbf{W}_X = \{-1; 1; 2; 3\}$

Die Funktion $X$ heißt *Zufallsgröße* auf $\Omega$.

Zu jedem Wert $x$, den die Zufallsgröße annehmen kann, gehört eine Teilmenge von $\Omega$: $\{\omega | X(\omega) = x\}$

**Beispiel:**
$$\begin{aligned} X &= 3: \quad \{666\} \\ X &= 2: \quad \{661; 662; \ldots; 616; 626; \ldots; 166; 266; \ldots\} \end{aligned}$$

| Gewinn $x$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

Funktion $W : x \mapsto P(X = x) \quad \mathbf{D}_x = \mathbf{R} \quad \mathbf{W}_x = [0; 1]$

$W$ heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsgröße $X$.

$\Omega' = \{-1; 1; 2; 3\} \quad W$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega'$.

### Graphische Darstellungen

Siehe Abbildungen 12.2, 12.3 und 12.4.

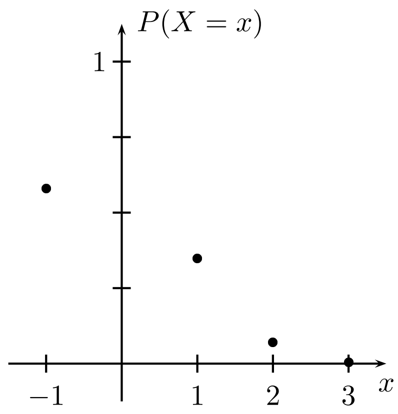



Abbildung 12.2.: Graph von $W$

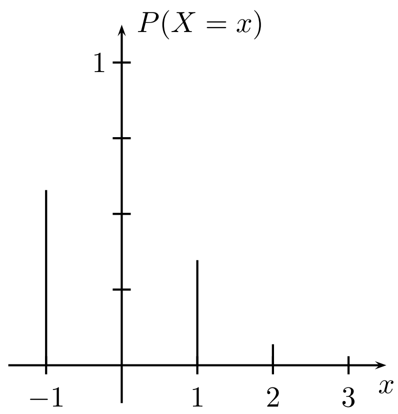



Abbildung 12.3.: Stabdiagramm

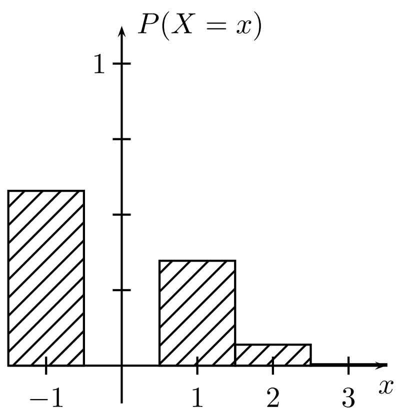



Abbildung 12.4.: Histogramm

## 12.2. Definitionen

**Definition:** Eine Funktion $X$, die jedem Ergebins $\omega$ eines Ergebnisraums $\Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt *Zufallsgröße* $X$ auf $\Omega$.

$$X : \omega \mapsto X(\omega) \quad \mathbf{D} = \Omega$$

**Beispiele:**

1. Schafkopf: $|\Omega| = \binom{32}{8}$
   $X$: Anzahl der Unter
   $\mathbf{W}_x = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
2. Roulette: $\Omega = \{0; 1; \ldots; 36\}$
   $X$: Reingewinn für 1. Dutzend
   $X : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ mit $X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; \ldots; 12\} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$

**Definition:** Die Funktion $P_x : x \mapsto P(X = x) \quad \mathbf{D}_{P_x} = \mathbf{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsgröße $X$ auf $(\Omega, P)$.

**Beispiele:**

1. Roulette: $X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; \ldots; 12\} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$
   $P(X = 2) = \frac{12}{37}$
   $P(X = -1) = \frac{25}{37}$
2. Spiel 77
   $X$: Anzahl der richtigen Endziffern
   $P(X = 7) = \left(\frac{1}{10}\right)^7$
   $P(X = i) = \left(\frac{1}{10}\right)^i \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{10^{i+1}}$

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = i)$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{9}{100}$ | $\frac{9}{1000}$ | $\frac{9}{10^4}$ | $\frac{9}{10^5}$ | $\frac{9}{10^6}$ | $\frac{9}{10^7}$ | $\frac{1}{10^7}$ |

## 12.3. Die Dichtefunktion

**Beispiel:** Roulette, $X$: Reingewinn für 1. Dutzend

| $x$ | $-1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{25}{37}$ | $\frac{12}{37}$ |

Histogramme siehe Abb. 12.3 und 12.3.12
$P(a_1 < X \leq a_2) = (a_2 - a_1) \cdot d(x)$
allgemein: $P(a_{i-1} < X \leq a_i) = (a_i - a_{i-1}) \cdot d(x)$
Dichtefunktion: $d(x) = \frac{P(a_{i-1} < X \leq a_i)}{a_i - a_{i-1}}$

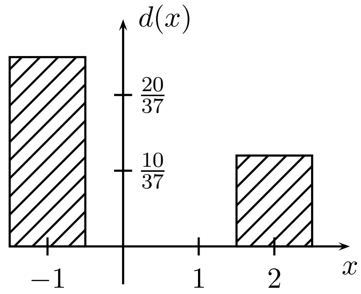



Abbildung 12.5.: Histogramm 1 für $X$: Reingewinn beim Roulette für das erste Dutzend

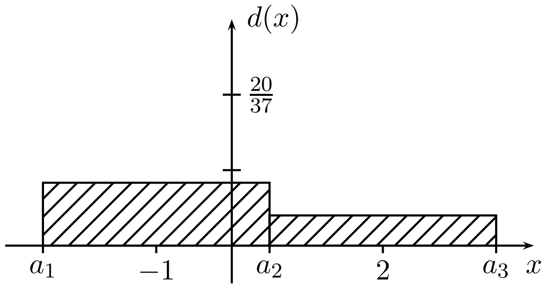



Abbildung 12.6.: Histogramm 2 für $X$: Reingewinn beim Roulette für das erste Dutzend

## 12.4. Verteilungsfunktionen

**Beispiel:** Bridge, 52 Karten, 4 Spieler

$X$: Anzahl der Herzkarten, die Spieler 2 erhält, falls Spieler 1 keine hat.

$P(X = x_i) = \frac{\binom{13}{x_i}\binom{26}{13-x_i}}{\binom{39}{13}}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $P(X = x_i)$ | 0,00128 | 0,01546 | 0,07420 | 0,18703 | 0,27505 |

$$(X \leq 3) = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3) = \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) := F(3)$$

$$F(b) := P(X \leq b)$$

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(b)$ | 0,00128 | 0,0167 | 0,0904 | 0,27797 | 0,55302 | 0,80056 |

$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = F(5) - F(2)$

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5)$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - f(a)$$

**Definition:** Die Funktion $F: x \mapsto P(X \leq x) \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$ heißt *kumulative Verteilungsfunktion* der Zufallsgröße $X$.

**Satz:** Hat die Zufallsgröße die Wertemenge $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, so gilt:
$F(X) = \sum\limits_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

**Beispiel:** 3-facher Münzwurf; $X$: Anzahl der Köpfe

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $F(x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | 1 |

Diagramme siehe Abbildungen 14.2 und 12.8.

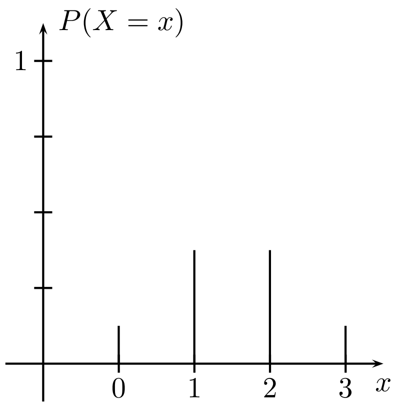



Abbildung 12.7.: Stabdiagramm

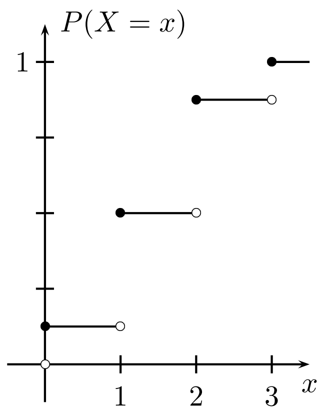



Abbildung 12.8.: Verteilungsfunktion

$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

| $x \in$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $]\infty; 0[$ | $0$ |
| $[0; 1[$ | $\frac{1}{8}$ |
| $[1; 2[$ | $\frac{4}{8}$ |
| $[2; 3[$ | $\frac{7}{8}$ |
| $[3; [$ | $1$ |

**Eigenschaften einer Verteilungsfunktion:**

1. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $F$ ist monoton zunehmend.
4. $F$ ist rechtsseitig stetig bei $x_i$.
5. Der Graph von $F$ springt an der Stelle $x_i$ um $P(X = x)$ nach oben.
6. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$
7. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
8. $P(X > a) = 1 - F(a)$

## 12.5. Mehrere Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum

**Beispiel:** Roulette:

$X$: Reingewinn für „1. Dutzend“
$Y$: Reingewinn für „1. Querreihe“

| $x$ | $2$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{25}{37}$ |

| $y$ | $11$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $P(Y = y)$ | $\frac{2}{27}$ | $\frac{34}{37}$ |

**gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung (gleiche Ausspielung)**

| $y$ \ $x$ | $2$ | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $11$ | $\frac{3}{37}$ | $0$ | $\frac{3}{37}$ |
| $-1$ | $\frac{9}{37}$ | $\frac{25}{37}$ | $\frac{34}{37}$ |
| | $\frac{12}{37}$ | $\frac{25}{37}$ | |

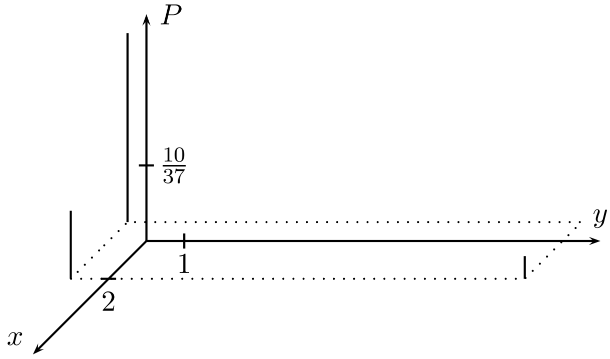



Abbildung 12.9.: graphische Darstellung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen

**graphische Darstellung** siehe Abbildung 12.9

$P_{Y=11}(X=-1)=0$

$P(X=-1)=\frac{25}{37}$

$P(X=-1 \wedge Y=11) \neq P(X=-1)\cdot P(Y=11) \Rightarrow X, Y$ stochastisch abhängig

**Definition:** $X, Y$ seien Zufallsgrößen auf $(\Omega, P)$ mit $\mathbf{W}_X=\{x_1;\ldots;x_n\}$ und $\mathbf{W}_Y=\{y_1;\ldots;y_n\}$. Dann heißt die Funktion $P_{XY}:(x_i;y_j)\mapsto P(X=x_i \wedge Y=y_j)$ *gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung*.

**Definition:** Zwei auf $(\Omega, P)$ definierte Zufallsgrößen $X$ und $Y$ heißen stochastisch unabhängig, wenn *für alle* $(x_i;y_j)\in\mathbf{W}_X\times\mathbf{W}_Y$ die Multiplikationsregel $P(X=x_i \wedge Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$ gilt.

## 12.6. Verknüpfung von Zufallsgrößen

siehe: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz. Bayerischer Schulbuch Verlag. München 1997. Seiten 173–176.

# 13. Maßzahlen für Zufallsgrößen

**Beispiel:** Roulette, gesetzt auf 1. Dutzend, $X$: Bankgewinn

| $x$ | $-2$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{25}{37}$ |

$n$ Spiele: $\frac{12}{37} \cdot n \cdot (-2) + \frac{25}{37} \cdot n \cdot 1 = \frac{1}{37}n$
pro Spiel: mittlerer Bankgewinn $\overline{x} = \frac{1}{37}$

**Definition:** Sei $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ die Wertemenge einer Zufallsgröße $X$, so heißt $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_k \cdot P(X = x_k)$ *Erwartungswert* von $X$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i)$$

**Beispiel:** Erwartungswert beim Werfen eines idealen Würfels. $X$: Augenzahl

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

## 13.1. Rechenregeln

1. Zufallsgröße kann nur einen Wert $a$ annehmen:

$$E(X) = a$$

2. Linearität
   Zufallsgröße $X$, Zufallsgröße $Z = aX + b$

$$E(aX + b) = aE(x) + b$$

3. Summe zweier Zufallsgrößen

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

4. Linearkombination

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(x_2) + \cdots + a_nE(x_n)$$

5. Produktregel

**Beispiel:** Münzwurf

$X$: Anzahl der Wappen beim 1. Wurf
$Y$: Anzahl der Wappen beim 2. Wurf
$Z = X \cdot Y$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(Y = y)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $z$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(Z = z)$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

$E(Z) = \frac{1}{4} = E(X) \cdot E(Y)$

„Schweißt man zwei Euro-Stücke an den Rändern zusammen, sodass die Ziffer 1 jeweils auf der gleichen Seite liegt, so haben wir zwei gleiche Zufallsgrößen, die bekanntlich total abhängig sind. Es gilt dann $E(X \cdot X) = E(X^2) = E(X) = \frac{1}{2} \neq E(X) \cdot E(X) = \frac{1}{4}$.“[1]

Der Erwartungswert des Produktes zweier *unabhängiger* Zufallsgrößen ost gleich dem Produkt der Erwartungswerte der einzelnen Zufallsgrößen.

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ falls $X, Y$ stochastisch unabhängig (Umkehrung gilt nicht!)

## 13.2. Varianz und Standardabweichung

**Beispiel:**

| $x$ | $-2$ | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

| $x$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

$E(X) = E(Y) = 0$, aber größere Streuung bei $Y$.

**Gesucht:** Maß für die mittlere Abweichung vom Erwartungswert $\mu$.

$\mu := E(X)$
$E(X - \mu) = E(X) - \mu = 0$

$$E\left((X - \mu)^2\right)$$

**Beispiel:** Roulette, 1. Dutzend, $X$: Bankgewinn

| $x$ | $-2$ | 1 |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{25}{37}$ |

$\mu = E(X) = \frac{1}{37}$

| $x - \mu$ | $-2\frac{1}{37}$ | $\frac{36}{37}$ |
|---|---|---|
| $P(X - \mu = x - \mu)$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{25}{37}$ |

$E\left((X - \mu)^2\right) = \left(-2\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{12}{37} + \left(\frac{36}{37}\right)^2 \cdot \frac{25}{37} = 1{,}97$

[1] aus: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz. Bayerischer Schulbuch Verlag. München 1997. (Seite 184)

**Definition:** $X$ sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $E(X) = \mu$. Dann heißt

$$Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

*Varianz(wert)* von $X$.

**Definition:** Die Zahl $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ heißt *Standardabweichung* der Zufallsgröße $X$.

**Beispiel:** „chuck a luck“

$X$: Gewinn

| $x$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

$E(X) = -\frac{17}{216}$
$Var(X) = \left(-1 + \frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{125}{216} + \cdots + \left(3 + \frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{1}{216} \approx 1{,}24$
$\sigma(X) \approx 1{,}11$

### 13.2.1. Rechenregeln für die Varianz

1. Die Varianz einer Zufallsgröße ist genau dann $0$, wenn eine entartete Verteilung mit $P(X = a) = 1$ vorliegt.
2. $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$
   $\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$

### 13.2.2. Standardisierung von Verteilungen

lineare Transformation: $T = aX + b \quad a \in \mathbf{R}^+, b \in \mathbf{R}$, so daß $\mu(T) = 0$, $\sigma(T) = 1$

$$\begin{aligned} I. \quad E(T) &= aE(X) + b = a\mu + b = 0 \\ II. \quad \sigma(T) &= a\sigma(X) = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = -\frac{\mu}{\sigma}$

$$T = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

### 13.2.3. Verschiebungsregel

$$E\left((X-\mu)^2\right) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

**Satz:** Für die Varianz $Var(X)$ einer Zufallsgröße $X$ gilt:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

**Beispiel:** Würfeln, $X$: Augenzahl

1. $E\left((X-\mu)^2\right) = (-2{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-0{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (0{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-2{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 2{,}917$
2. $E(X^2) - \mu^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3{,}5^2 \approx 2{,}917$

### 13.2.4. Weitere Rechenregeln

1. Für zwei *unabhängige* Zufallsgrößen $X$ und $Y$ gilt:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

2. Für eine Linearkombination *unabhängiger* Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gilt:

$$\begin{aligned} Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) &= \\ Var(a_1X_1) + Var(a_2X_2) + \cdots + Var(a_nX_n) &= \\ a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) + \cdots + a_n^2Var(X_n) \end{aligned}$$

## 13.3. Das $\sqrt{n}$-Gesetz

$X_i$: $i$-te Messung. $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$
Mittelwerte: $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$
$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \cdot (E(X_1) + \cdots + E(X_n)) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$
$Var(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot (Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$
$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Haben $n$ unabhängige Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert $\mu$ und der Standardabweichung $\sigma$, dann gilt für das arithmetische Mittel $\overline{X}$:

$$\mu(\overline{X}) = \mu \quad \text{und} \quad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## 13.4. Schätzwerte für Varianz und Standardabweichung

Die Wahrscheinlichkeit wird durch die relative Häufigkeit ersetzt. Man bezeichnet den Schätzwert für die Standardabweichung mit $s$.

Ungenauigkeit des Mittelwerts: $\frac{s}{\sqrt{n}}$

# 14. Die Binomialverteilung

## 14.1. Bernoulli-Experiment

nur zwei mögliche Versuchsausgänge: 1 Treffer Wahrscheinlichkeit $p$
0 Niete Wahrscheinlichkeit $1 - p = q$

$\Omega = \{0; 1\}$

**Definition:** Ein Zufallsexperiment mit dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P)$, bei dem $\Omega = \{0; 1\}$, $P(\{1\}) = p$ und $P(\{0\}) = 1 - p = q$ ist, heißt *Bernoulli-Experiment* mit Trefferwahrscheinlichkeit $p$.

**Beispiel:** Glücksrad (siehe Abb. 14.1)

$$p = \frac{\alpha}{360\,\mathrm{deg}}$$

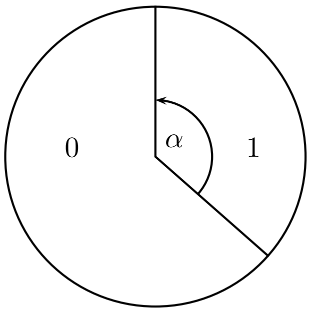



Abbildung 14.1.: Glücksrad

## 14.2. Bernoulli-Ketten

**Beispiel:** dreimaliges Drehen des Glücksrades (Abb. 14.1)

$$\Omega = \{(0,0,0), (1,0,0), \dots\} = \{0,1\}^3$$

**Definition:** Ein $n$-stufiges Bernoulli-Experiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^n$, bei dem die Ereignisse

$E_i$ : „Treffer in der $i$-ten Stufe“

- unabhängig sind und
- die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(E_i) = p$ haben für $i = 1, \dots, n$,

heißt *Bernoullikette* der Länge $n$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p$.

**Urnenmodell:** Ziehen mit Zurücklegen, $N$ Kugeln, $S$ davon schwarz

$$\begin{array}{rl} \text{schwarze Kugel (Treffer):} & p = \dfrac{S}{N} \\ \text{nicht schwarze Kugel (Niete):} & q = 1 - \dfrac{S}{N} \end{array}$$

**Sonderfälle:** $X$: Anzahl der Treffer

1. Lauter Treffer bzw. lauter Nieten

$$P(X = n) = p^n \qquad \text{bzw.} \qquad P(X = 0) = q^n = (1-p)^n$$

2. Mindestens ein Treffer

$$P(X \geq 1) = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n$$

3. Anzahl der Versuche

**Beispiel:** Wie oft muß man würfeln, um mit mehr als 90%-iger Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln?

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n &> 0{,}9 \\ 0{,}10 &> \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \lg 0{,}10 &> \lg \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \lg 0{,}10 &> n \lg \frac{5}{6} & \text{Beachte: } \lg \frac{5}{6} < 0 \\ n &> \frac{\lg 0{,}1}{\lg \frac{5}{6}} \approx 12{,}6 & \rightarrow \text{mindestens 13 mal} \end{aligned}$$

**Verallgemeinerung:** kleinste Anzahl $n$ der Versuche, um mit Mindestwahrscheinlichkeit $\beta$ mindestens einen Treffer zu erhalten:

$$n \geq \frac{\lg(1-\beta)}{\lg(1-p)}$$

## 14.3. Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit für genau $k$ Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge $n$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$ vgl. Urnenmodell Kapitel 9.9

Formel von Bernoulli

**Beispiel:** $n = 6, p = \frac{1}{3}$

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 8,8% | 26% | 33% | 22% | 8,2% | 1,6% | 0,1% |

Stabdiagramm siehe Abbildung 14.2

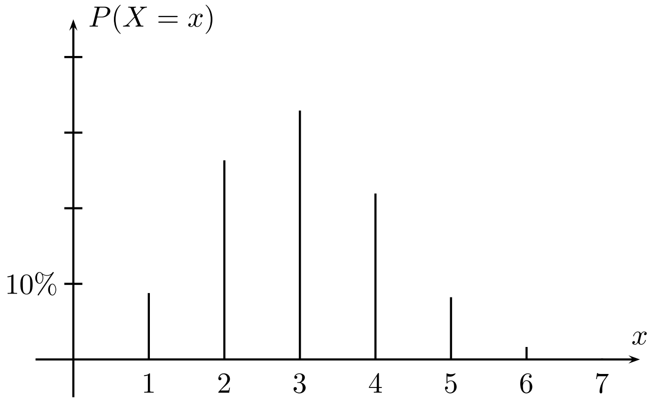



Abbildung 14.2.: Stabdiagramm

**Definition:** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ heißt *Binomialverteilung* mit den Parametern $n$ und $p$. Eine Zufallsgröße $X$ mit $P(X = k) = B(n; p; k)$ heißt *binomialverteilt* nach $B(n; p)$.

**Summenformel:**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1}$$

**Rekursionsformel:** $\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^n q^{n-k}} = \frac{n!k!(n-k)!p}{(k+1)!(n-k-1)!n!q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}$

$$\boxed{B(n; p; k + 1) = \frac{n - k}{k + 1} \cdot \frac{p}{q} \cdot B(n; p; k)}$$

### 14.3.1. Die Verteilungsfunktion

höchstens $k$ Treffer:

$$F(n;p;x) = P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} B(n;p;i)$$

**Beispiel:** $n = 6$, $p = \frac{1}{3}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 8,8% | 35% | 68% | 90% | 98% | 99,6% | 100% |

**Beispiel:** Es sei bekannt, daß von einer bestimmten Sorte Tulpenzwiebeln 20% nicht keimen.

$X$: Anzahl der nicht keimenden Zwiebeln in einer zufällig ausgewählten 50er-Packung

$$\begin{aligned}
P(X = 10) &\approx 14\% \\
P(X \leq 6) &\approx 10\% \\
P(X \geq 9) &= 1 - P(X \leq 8) \approx 69\% \\
P(6 \leq X \leq 13) &= P(X \leq 13) - P(X \leq 5) \approx 89\% - 5\% = 84\% \\
P(X < 5) &= P(X \leq 4) = 1{,}9\% \\
P(X > 15) &= 1 - P(X \leq 15) = 3\%
\end{aligned}$$

### 14.3.2. Erwartungswert und Varianz

**Beispiel:** Würfel, $n = 5$, $p = \frac{1}{3}$, $X$: Anzahl der Treffer

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

**Begründung:** $X_i$: Anzahl der Treffer im $i$-ten Bernoulli-Experiment

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X_i = x_i)$ | $q$ | $p$ |

$$\begin{aligned}
E(X_i) &= p \\
Var(X_i) &= p - p^2
\end{aligned}$$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np \\
Var(X) &= Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = n(p - p^2) = np(1-p) = npq
\end{aligned}$$

**Satz:** Ist $X$ verteilt nach $B(n;p)$, so gilt:

$$\boxed{\begin{aligned}
E(X) &= np \\
Var(X) &= npq \\
\sigma(X) &= \sqrt{npq}
\end{aligned}}$$

### 14.3.3. Die wahrscheinlichste Trefferzahl

**Beispiel:** $n = 10$, $p = 0{,}4$

**Gesucht:** die wahscheinlichste(n) Trefferzahl(en)

**Monotoniebereiche:**

$$\frac{B(10;0{,}4;k+1)}{B(10;0{,}4;k)} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{2}{3} =: q(k)$$

$q(k) > 1$**:** Wahrscheinlichkeiten nehmen zu

$$\begin{aligned} \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{2}{3} &> 1 \\ 20 - 2k &> 3k + 3 \\ 17 &> 5k \\ k &< \frac{17}{5} = 3{,}4 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Zunahme von 0 bis 4

$q(k) = 1$**:** $k = 3{,}4$ nicht ganzzahlig $\rightarrow$ kein Doppelmaximum

$q(k) < 1$**:** Wahrscheinlichkeiten nehmen ab
$k > 3{,}4 \rightarrow$ Abnahme von 4 bis 10

$\rightarrow$ wahrscheinlichste Trefferzahl $k = 4$

**Verallgemeinerung:**

$$q(k) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}$$

$$q(k) > 1: \qquad \begin{aligned} \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} &> 1 \\ np - k &> qk + q \\ np - q &> qk + pk \\ np - q &> k \end{aligned}$$

- Ist $np-q$ nicht ganzzahlig, so nimmt $B(n;p)$ das Maximum an für $k = [np-q]+1 = [(n+1)p]$.
- Ist $np - q$ ganzzahlig, so nimmt $B(n;p)$ für $k = np - q = (n+1)p$ und $k = np - q + 1 =$ gleiche Maximalwerte an.

**Beispiel:** $n = 9$, $p = 0{,}2$

$np - q = 9 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 = 1$
$\rightarrow$ Doppelmaximum bei $k = 1$ und $k = 2$

# 15. Die Ungleichung von Tschebyschew

Abweichwahrscheinlichkeit vom Erwartungswert $P(|X-\mu| \geq c) \quad c > 0$
Gesucht: Zusammenhang zwischen $P(|X-\mu| \geq c) \quad c > 0$ und $\sigma$

$$E = \left\{x_i \middle| |x_i - \mu| \geq c\right\} \qquad\qquad \overline{E} = \left\{x_i \middle| |x_i - \mu| < c\right\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X = x_i) \\
&= \sum_{x_i \in E} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X = x_i) + \underbrace{\sum_{x_i \in \overline{E}} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X = x_i)}_{\geq 0} \\
\sigma^2 &\geq \sum_{x_i \in E} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X = x_i)
\end{aligned}$$

mit $|x_i - \mu| \geq c \Leftrightarrow (x_i-\mu)^2 \geq c^2$:

$$\sigma^2 \geq \sum_{x_i \in E} c^2 \cdot P(X = x_i) = c^2 \cdot \sum_{x_i \in E} P(X = x_i) = c^2 \cdot P(|X-\mu| \geq c)$$

Mit Hilfe der Varianz können die Wahrscheinlichkeiten von Mindestabweichungen einer Zufallsgröße vom Erwartungswert nach oben abgeschätzt werden.

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}}$$

$$\boxed{P(|X-\mu| < c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2}}$$

$$\boxed{P(|X-\mu| > c) < \frac{Var(X)}{c^2}}$$

$$\boxed{P(|X-\mu| \leq c) > 1 - \frac{Var(X)}{c^2}}$$

## 15.1. Die $k\sigma$-Regel

Abweichung $c$ als Vielfaches der Standardabweichung: $c = k \cdot \sigma$

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}}$$

## 15.2. Ungleichung für das arithmetische Mittel

$$P(|\overline{X}-\mu| \geq c) \leq \frac{Var(\overline{X})}{c^2} \qquad \text{mit } Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Für das arithmetische Mittel $\overline{X}$ von $n$ gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i$ mit dem Erwartungswert $\mu$ und der Varianz $\sigma^2$ gilt:

$$\boxed{P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \geq c\right) \leq \frac{\sigma^2}{nc^2}}$$

## 15.3. Das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen

Zufallsgröße $X$, verteilt nach $B(n;p)$
Gesucht: Abweichwahrscheinlichkeit der relativen Häufigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit.

$$P(|X-E(X)| < c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2}$$

$$P(|X-np| < c) \geq 1 - \frac{npq}{c^2} \qquad -c < X - np < c$$

$$-\frac{c}{n} < \frac{X}{n} - p < \frac{c}{n}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| < \frac{c}{n}\right) \geq 1 - \frac{npq}{c^2}$$

setze $\frac{c}{n} =: \epsilon \quad \Rightarrow \quad c^2 = n^2\epsilon^2$

**Satz:** Sei $\frac{X}{n}$ die relative Häufigkeit eines Treffers in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern $n$ und $p$, so gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$\boxed{P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{npq}{c^2}}$$

**Vergröberung der Abschätzung:**

$$p \cdot q = p(1-p) = p^2 + p \leq \frac{1}{4} \qquad \text{da Parabel mit Maximum bei } \left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2}}$$

**Satz:** Sei $H_n(A)$ die relative Häufigkeit eines Ereignisses $A$ in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern $n$ und $p$, so gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(|H_n(A) - p| < \epsilon) = 1}$$

# 16. Die Normalverteilung

## 16.1. Standardisierung

$X$ binomialverteilte Zufallsgröße, $n$ sehr groß
$T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $\quad \mu(T) = 0 \quad \sigma(T) = 1$

**Histogramm:**

- Verschiebung um $\mu$ nach links
- Stauchung in $x$-Richtung um den Faktor $\frac{1}{\sigma}$
- Streckung in $y$-Richtung mit Faktor $\sigma$

| | |
|---|---|
| Dichtefunktion der Binomialverteilung: | $d_n(x)$ |
| Dichtefunktion des standardisierten Histogramms: | $\phi_n(x)$ |

$$d_n(x) = B(n;p;k) \qquad \text{für } x \in ]x-0{,}5; k+0{,}5]$$

$$\phi_n(t) = \sigma \cdot d_n(x) \qquad \text{für } t \in \left]\frac{k-0{,}5-\mu}{\sigma}; \frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right]$$

## 16.2. Approximation der standardisierten Histogramme

**Gesucht:** Grenzkurve der Dichtekurven $\phi_n$ für große $n$

**Beispiel:** $B\left(n; \frac{1}{3}\right)$

**Eigenschaften:**

1. Glockenform
2. Hochpunkt $(0; 0{,}4)$
3. überspannte Fläche von Inhalt 1
4. Wendepunkt bei $t = \pm 1$

**Ansatz:** $\phi(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt^2} \quad a, b > 0$

Eigenschaft 2:
$$\phi'(t) = -2abt\mathrm{e}^{-bt^2}$$
$$t = 0 \quad \text{Nullstelle mit Vorzeichenwechsel}$$
$$\phi(0) = a \stackrel{!}{=} 0{,}4$$

Eigenschaft 4:
$$\phi''(t) = -2ab \cdot \mathrm{e}^{-bt^2} + 2abt \cdot \mathrm{e}^{-bt^2} \cdot 2bt = 2ab\mathrm{e}^{-bt^2}(2bt^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$$
$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{2b}} \stackrel{!}{=} \pm 1$$
$$\Rightarrow b = 0{,}5$$
$$\phi(t) = 0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}5t^2}$$

Eigenschaft 3: $a\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-bt^2}\mathrm{dt} \stackrel{!}{=} 1$

mit Hilfe von
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{dt} = \sqrt{\pi} \quad \text{(Euler)}$$
folgt daraus:
$$a\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} \stackrel{!}{=} 1$$
mit $b = 0{,}5$:
$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}40$$

**Satz:** Mit wachsendem $n$ nähern sich die Dichtefunktionen $\phi_n$ der standardisierten Binomialverteilung $B(n;p)$ für *jedes* $p \in ]0;1[$ der Grenzfunktion $\phi$ mit $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$ mit $t = \frac{k-\mu}{\sigma}$ und $\phi_n(t) = \sigma \cdot B(n;p;k)$ an.

## 16.3. Lokale Näherung von Moivre und Laplace

Für genügend große $n$ und jedes $p \in ]0;1[$ gilt:

$$\boxed{B(n;p;k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

**Beispiel:** $n = 100,\ p = 0{,}2,\ k = 24, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 4$

- exakter Wert: $B(100; 0{,}2; 24) = 5,8\%$
- Näherung: $\frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{4}\phi\left(\frac{24-20}{4}\right) = \frac{1}{4}\phi(1) \approx 6\%$

## 16.4. Integraler Grenzwertsatz

Verteilungsfunktion $F(n;p;x) = P_n^p(X \leq x)$

$$\Phi(t) = P(T \leq t)$$
$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

**Gesucht:** $P(k_1 \leq X \leq k_2)$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \mu - 0{,}5}{\sigma}\right)$$

**lokale Näherung:**

$$P(X = k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - \mu - 0{,}5}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$$

## 16.5. Eigenschaften von $\phi$ und $\Phi$

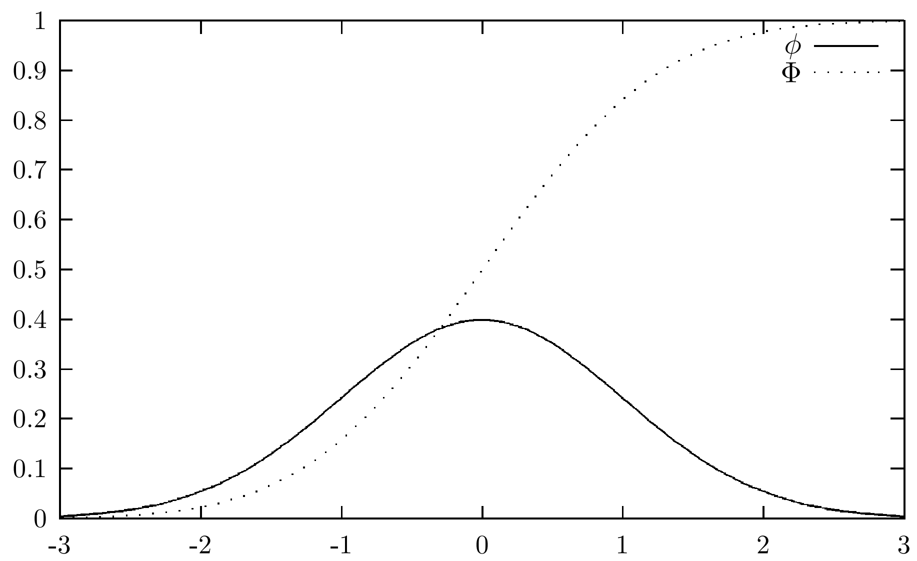



Abbildung 16.1.: Die Graphen von $\phi$ und $\Phi$

**Eigenschaften von $\phi$:**

- $\phi(-t) = \phi(t)$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\mathrm{dt} = 1$

**Eigenschaften von $\Phi$**

- $0 < \Phi(t) < 1$
- $\Phi(0) = 0{,}5$

$$\boxed{\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)}$$

$$\boxed{\Phi(t) - \Phi(-t) = 2 \cdot \Phi(t) - 1}$$

## 16.6. Die Normalverteilung

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \text{(siehe Abb. 16.2)}$$

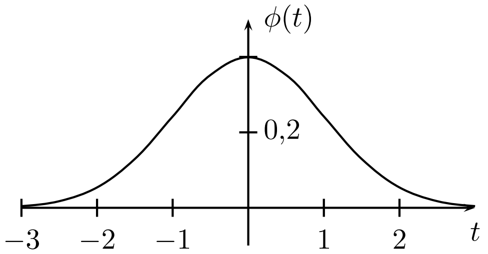



Abbildung 16.2.: standardisierte Glockenkurve

$$B(n;p;k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) =: \phi_{\mu\sigma}(k)$$

$$\phi_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Phi_{\mu\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_{\mu\sigma}(z)\mathrm{d}z$$

**Definition:** Gilt für eine Zufallsgröße $X$ mit der Wertemenge $\mathbf{R}$ $P(X \leq x) = \Phi_{\mu\sigma}(x)$, so heißt $X$ *normalverteilt* nach der Normalverteilung $N(\mu;\sigma)$. $\phi_{\mu\sigma}$ heißt *Dichtefunktion* von $\Phi_{\mu\sigma}$.

**$k\sigma$-Regel**

$$P\left(|X-\mu| \leq k\sigma\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{k\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(k) - 1$$

$$\begin{aligned}
k = 1: &\qquad P(|X-\mu| \leq \sigma) = 68{,}3\% \\
k = 2: &\qquad P(|X-\mu| \leq 2\sigma) = 95{,}5\% \\
k = 3: &\qquad P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = 99{,}7\%
\end{aligned}$$

## 16.7. Der zentrale Grenzwertsatz

**Gesucht:** Verteilung einer Summe von Zufallsvariablen $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

**Beispiel:** Würfeln mit $n$ Würfeln

$X_i$: Augenzahl des $i$-ten Würfels

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$: Augensumme

für große $n$ näherungsweise normalverteilt

**Verallgemeinerung:** Die $X_i$ müssen nicht gleichverteilt sein

**Satz:** $X_i$ seien beliebig verteilte Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert $\mu_i$ und der Varianz ${\sigma_i}^2$. Dann gilt für die Zufallsgröße $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ (unter schwachen Voraussetzungen, die praktisch immer erfüllt sind)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - \mu}{\sigma} \leq t\right) = \Phi(t)$$

mit $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$ und $\sigma^2 = {\sigma_1}^2 + \cdots + {\sigma_n}^2$.

# 17. Testen von Hypothesen

## 17.1. Alternativtests

**Beispiel:** Zufallsstichprobe vom Umfang 10

$Z$**:** Anzahl der defekten Stücke

**zwei Hypothesen:**

$H_1$**:** 1. Wahl, $p = 0{,}1$

$H_2$**:** 2. Wahl, $p = 0{,}3$

**Entscheidungsregel:** $Z \leq 2 \rightarrow$ Entscheidung für $H_1$

$Z \in A_1 = \{0; 1; 2\}$ Annahmebereich für $H_1$

$Z \in A_2 = \{3; \ldots; 10\}$ Annahmebereich für $H_2$

| Realität | Entscheidung aufgrund der Stichprobe | |
|---|---|---|
| $H_1$ trifft zu | Annahme von $H_1$ (richtige Entscheidung) | Annahmevon $H_2$ (falsche Entscheidung) |
| $H_2$ trifft zu | Annahme von $H_1$ (falsche Entscheidung) | Annahmevon $H_2$ (richtige Entscheidung) |

**Risiko 1. Art:** irrtümliche Entscheidung für $H_2$

$H_1$ trifft zu: $P = 0{,}1$

$$P_{0,1}^{10}(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 2) = 7\%$$

**Risiko 2. Art:** irrtümliche Entscheidung für $H_1$

$H_2$ trifft zu: $P = 0{,}3$

$$P_{0,3}^{10}(Z \leq 2) = 38{,}3\%$$

**Ändern der Entscheidungsregel:**

$$A_1 = \{0; 1\}$$
$$A_2 = \{2; \ldots; 10\}$$

**Risiko 1. Art:**

$$P_{0,1}^{10}(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 26\%$$

**Risiko 2. Art:**

$$P_{0,3}^{10}(Z \leq 1) = 15\%$$

**Ändern des Stichprobenumfangs:** $n = 20$

**Entscheidungsregel:**

$$A_1 = \{0; 1; 2; 3\}$$
$$A_2 = \{4; \ldots; 20\}$$

**Risiko 1. Art:**

$$P^{20}_{0,1}(Z \geq 4) = 1 - P(Z \leq 3) = 13\%$$

**Risiko 2. Art:**

$$P^{20}_{0,3}(Z \leq 3) = 11\%$$

**Festlegung der Entscheidungsregel bei vorgegebener Fehlerwahrscheinlichkeit:**

Das Risiko 1. Art soll höchstens $5\%$ betragen bei $n = 20$.

$$A_1 = \{0; \ldots; k\}$$
$$A_2 = \{k + 1; \ldots; 20\}$$

**Risiko 1. Art:**

$$\begin{aligned} P^{20}_{0,1}(Z \geq k + 1) &\leq 0{,}05 \\ 1 - P^{20}_{0,1}(Z \leq k) &\leq 0{,}05 \\ P^{20}_{0,1}(Z \leq k) &\geq 0{,}95 \\ &\overset{Tabelle}{\Rightarrow} k = 4 \end{aligned}$$

**Risiko 2. Art:** $P^{20}_{0,3}(Z \leq 4) = 23{,}8\%$

## 17.2. Signifikanztest

**Beispiel 1:** Können frischgeschlüpfte Küken Körner erkennen?

**Test:** Lege einem Küken Papierkörner (P) und echte Körner (K) in gleicher Anzahl vor und lasse es zehnmal picken.

**Treffer:** Küken pickt ein echtes Korn.

$Z$**:** Anzahl der Treffer.

**Nullhypothese** $H_0$**:** Küken erkennt keine Körner, $p = \frac{1}{2}$.

**Alternative** $H_1$**:** Küken erkennt Körner, $p > \frac{1}{2}$.

**Entscheidungsregel:**
$$\begin{array}{cccc} Z & \leq & 6 & \rightarrow & H_0 \\ Z & \geq & 7 & \rightarrow & H_1 \end{array}$$

**Beispiel:** Pickprotokoll KKKPKKPKKK

Wahrscheinlichkeit, mindestens $8$ Treffer zu erhalten, obwohl das Küken keine Körner erkennt:

$$P^{10}_{0,5}(Z \geq 8) = 1 - P^{10}_{0,5}(Z \leq 7) = 5{,}5\%$$

Dieses Ergebnis ist signifikant auf dem Niveau $5{,}5\%$.

**Risiko 1. Art:** Ablehnen der Nullhypothese, obwohl sie wahr ist:

$$P_{0,5}^{10}(Z \geq 7) = 1 - P_{0,5}^{10}(Z \leq 6) = 17\%$$

**Risiko 2. Art:** $p > \frac{1}{2} \quad P(Z \leq 6)$

$$\begin{array}{lllll} \text{z. B.} & p & = & 0{,}6 & 67\% \\ & p & = & 0{,}7 & 35\% \\ & p & = & 0{,}8 & 12\% \\ & p & = & 0{,}9 & 1\% \end{array}$$

Wie muß die Entscheidungsregel geändert werden, damit das Risiko 1. Art kleiner als $5\%$ ist?

$$\begin{aligned} P_{0,5}^{10}(Z \geq k) &< 5\% \\ 1 - P_{0,5}^{10}(Z \leq k-1) &< 5\% \\ P_{0,5}^{10}(Z \leq k-1) &> 95\% \\ k-1 &\geq 8 \\ k &\geq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} Z & \leq & 8 & \rightarrow & H_0 \\ Z & \geq & 9 & \rightarrow & H_1 \end{array}$$