Fachhochschule München

Fachbereich 07

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Skript zur Vorlesung von **Prof. Dr. Leitner**

(gehalten im Sommersemester 2002)

Stand: 1. Januar 2003

Erstellt von Matthias Kessler

Korrekturgelesen von Prof. Dr. Leitner*

*bis Seite 71

Vorwort

Rechtliches

Ich bitte hiermit um Verständnis, dass diese Mitschrift nicht den Anspruch der Fehlerfreiheit und der Vollständigkeit trägt. Eine Haftung für eventuelle Nachteile durch nichtbestandene Klausuren oder ähnliches wird nicht übernommen!

Anregungen

In vielen Fällen könnten genauere Erklärungen nicht schaden, dieses Skript ist also noch lange nicht fertig. Außerdem kann das Skript noch Fehler enthalten und ist auch noch weit von einem perfekten Layout entfernt. Falls jemandem Fehler auffallen, bitte ich darum mir den Fehler samt Position (Kapitel, Sektion,...) per Email (matthias.kessler@web.de) zuzusenden. Ich werde ihn dann so schnell wie möglich verbessern. Vielen Dank. Jeder, den die Lust packt, ein bißchen mit LaTeXherumzuexperimentieren, sei hiermit aufgefordert, zur Verbesserung des Skriptes beizutragen. Ich würde nur darum bitten, mir die entsprechend verbesserten Versionen auch wieder zukommen zu lassen.

Das Skript ist für zweiseitigen Druck optimiert.

Viel Spaß beim Lernen und viel Erfolg bei der Prüfung!

Matthias Kessler

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die mathematische Wahrscheinlichkeit

Definition 1.1 *Die Menge Ω der Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt* Ergebnisraum. *Jede Teilmenge von Ω heißt ein* Ereignis. *Die Menge $\mathfrak{P}(\Omega)$ heißt* Ereignisraum.

Beispiel 1.1 (Würfeln) *Es wird 1 Mal gewürfelt.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignisse sind beispielsweise:

$\{1, 2, 3\}$	*„Augenzahl ist kleiner/gleich 3“*
$\{2, 4, 6\}$	*„Augenzahl ist gerade“*
$\{6\}$	*„Augenzahl ist gleich 6“*

Beispiel 1.2 (Würfeln) *Es wird 2 Mal gewürfelt.* $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), \dots, (6, 6)\}$
Ereignisse sind beispielsweise:

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (6, 6)\}$	*„Pasch“*
$\{(6, 6)\}$	*„6er Pasch“*
$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$	*„Augensumme ist gleich 7“*

Bemerkung 1.1 *Ereignisse sind Teilmengen. Auf sie sind die Operationen $\cup, \cap, ^{-}$ anwendbar.*

Beispiel 1.3 (Würfeln) *Es wird 1 Mal gewürfelt.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignisse sind beispielsweise:

$E_1 =$	$\{1, 2, 3\}$	*„Augenzahl ist kleiner/gleich 3“*
$E_2 =$	$\{2, 4, 6\}$	*„Augenzahl ist gerade“*
$E_1 \cup E_2 =$	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$	*„Augenzahl ist kleiner/gleich 3 <u>oder</u> gerade“*
$E_1 \cap E_2 =$	$\{2\}$	*„Augenzahl ist kleiner/gleich 3 <u>und</u> gerade“*
$\overline{E_1} =$	$\{4, 5, 6\}$	*„Augenzahl ist <u>nicht</u> kleiner/gleich 3“*

Es stellt sich die Frage: Welche Wahrscheinlichkeiten können den Ereignissen zugeordnet werden?

Beispiel 1.4 (Lotto) *Beim Lotto „6 aus 49“ werden 6 Kugeln, die von 1 bis 49 durchnummeriert sind, nacheinander, ohne zurücklegen gezogen.* $\Omega = \{\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, \}, k_i \in \{1, 2, \dots, 49\}\}$

$W(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \ = ?$

$W(\text{Alle Zahlen kleiner/gleich } 20) \ = ?$

Beispiel 1.5 (Münzwurf) *3maliges Werfen einer Münze.* $\Omega = \{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ\}$

W (*„Genau 2 Mal Kopf“*) $= \frac{3}{8}$ *(???)*

W (*„2. Wurf ist Kopf“*) $= \frac{4}{8}$ *(???)*

Beispiel 1.6 (Münzwurf, Würfeln) *Gleichzeitiges Werfen einer Münze und eines Würfels.* $\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6\}$

Ereignisse:

$$\begin{array}{rcll} E_1 & = & \{K1, K2, K3, K4, K5, K6\} & \text{„Münze ist Kopf“} \\ E_2 & = & \{K1, K2, K3, Z1, Z2, Z3\} & \text{„Würfel} \leq 3\text{“} \\ E_3 & = & \{K1, K3, K5, Z1, Z3, Z5\} & \text{„Würfel ungerade“} \\ E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 & = & \{K1, K3\} & \text{„Münze K \underline{und} Würfel} \leq 3 \text{ \underline{und} Würfel ungerade“} \end{array}$$

$W(E) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ *(???)*

Definition 1.2 *Sei* Ω *eine Ergebnisraum. Eine Funktion* $P : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1]$ *heißt* Wahrscheinlichkeitsmaß *auf* Ω*, wenn gilt:*

(i)

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.1}$$

(ii) Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *paarweise disjunkt, dann gilt*

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.2}$$

Das Paar (Ω, P) *heißt auch* Wahrscheinlichkeitsraum.

Satz 1.1 *Sei* (Ω, P) *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt:*

(i)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.3}$$

(ii)

$$P(\emptyset) = 0 \tag{1.4}$$

(iii)

$$\text{Ist } A \subset B, \text{ so ist } P(A) \leq P(B) \tag{1.5}$$

(iv)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.6}$$

Beweis 1.1

(i)

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$\square$

(ii)

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) \\ &= P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \\ &= 1 + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

$\square$

(iii)

$$P(B) = P(A \cup B \backslash A) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

$\square$

(iv)

$$P(A \cup B) = P(A \cup B \backslash A) = P(A) + P(B \backslash A)$$

$\Rightarrow P(B \backslash A) = P(A \cup B) - P(A)$

$$P(B) = P(B \backslash A \cup (A \cap B)) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$\Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$ *also:*

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\square$

Definition 1.3 *Sei* (Ω, P) *ein Wahrscheinlichkeitsraum mit* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,\}$. *Wird jedem Elementarereignis* $\{\omega_i\}, i = 1, \ldots, n$ *dieselbe Wahrscheinlichkeit zugeordnet, also*

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n},$$

so spricht man von einem LAPLACE-Experiment. *Für ein beliebiges Ereignis A gilt dann*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Zahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Zahl der möglichen Ereignisse}} \tag{1.7}$$

Abbildung 1.1: Pierre-Simon LAPLACE (1749-1827)

Beispiel 1.7 (Würfeln) *Es wird mit 2 unterschiedlichen Würfeln gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?*

A: Es wird mindestens eine 6 geworfen.

B: Es wird höchstens eine 6 geworfen.

C: Die Augensumme ist mindestens 10.

$$\Omega = \{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \ldots & (6,6) \end{array} \}$$

$, |\Omega| = 36$, *Laplace-Annahme:* $P(\omega_i) = \frac{1}{36}, \ \forall i$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{(6,6)\}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{36}$

Beispiel 1.8 (Urne) *Eine Urne enthält 3 rote und 2 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln zufällig gezogen:*

a) gleichzeitig

b) nacheinander, ohne Zurücklegen

c) nacheinander, mit Zurücklegen

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A) 2 rote Kugeln zu ziehen?

Als erstes werden die Kugeln durchnummeriert: rot = 1 - 3, schwarz = 4 - 5.

a) $\Omega_a = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{10} = 0.3$$

b) $$\Omega_b = \begin{array}{cccccc} \{ & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \\ & (2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & \} \end{array}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = 0.3$$

c) $$\Omega_c = \begin{array}{cccccc} \{ & (1,1) & (1,2) & \dots & (1,5) & \\ & (2,1) & (2,2) & \dots & (2,5) & \\ & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ & (5,1) & (5,2) & \dots & (5,5) & \} \end{array}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{25} = 0.36$$

Kapitel 2

Kombinatorik

2.1 Grundlagen

Beispiel 2.1 *Ein Kombinationsschloss besitzt 5 Rädchen mit den Ziffern 0,1,...,9. Wie viele Einstellungsmöglichkeiten gibt es?*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Ziffer} & 10 \\ \text{2. Ziffer} & 10 \\ \text{3. Ziffer} & 10 \\ \text{4. Ziffer} & 10 \\ \text{5. Ziffer} & 10 \end{array}\right\} \textit{insgesamt } 10^5 \textit{ Möglichkeiten.}$$

Satz 2.1 *Die Anzahl der k-Tupel aus einer n-elementigen Menge ist*

$$n^k \tag{2.1}$$

Beispiel 2.2 *4-Elementige Menge $\{\square, \triangle, \bigcirc, \diamond\}$. Wieviele 5-Tupel gibt es?*

Es gibt $4^5 = 1024$ Möglichkeiten.

Beispiel 2.3 *Auslosung der 6 Bahnen beim 400m-Lauf auf 6 Läufer. Wieviele Möglichkeiten gibt es?*

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Vergabe der 1. Bahn} & 6 \\ \text{Vergabe der 2. Bahn} & 5 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Vergabe der 6. Bahn} & 1 \end{array}\right\} \textit{Insgesamt } 6! = 720 \textit{ Möglichkeiten.}$$

Allgemein gilt: Die Anzahl der Möglichkeiten n Dinge anzuordnen ist $n!$. Eine solche Anordnung heißt *Permutation.*

Satz 2.2 *Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist*

$$n! \tag{2.2}$$

Beispiel 2.4 *3-elementige Menge* $\{1,2,3\}$. *Es gibt* $3! = 6$ *Möglichkeiten:*

1	1	2	2	3	3
2	3	1	3	1	2
3	2	3	1	2	1

Beispiel 2.5 *Geburtstagsfeier mit 10 Gästen. Wie viele Möglichkeiten für die Sitzordnung gibt es?*

Antwort: $10! = 3628800$

Verallgemeinerung: Anzahl der k-Tupel, bei denen alle k Elemente verschieden sind und aus einer n-elementigen Menge ausgewählt werden (k-*Permutation*).

$$\left.\begin{array}{lr} \text{1. Stelle} & n \\ \text{2. Stelle} & n-1 \\ \vdots & \vdots \\ \text{k. Stelle} & n-k+1 \end{array}\right\} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \tfrac{n!}{(n-k)!}$$

Satz 2.3 *Die Anzahl der* k*-Permutationen aus einer* n*-elementigen Menge ist*

$$\frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.3}$$

Beispiel 2.6 *Wie viele Möglichkeiten gibt es 40 Studenten in der Aula (500 Sitzplätze) zu setzen?*

Es gibt $\frac{500!}{460!} = 500 \cdot 499 \cdot \ldots \cdot 461 \approx 1.83 \cdot 10^{107}$ *Möglichkeiten.*

Beispiel 2.7 (Pferdelotto) *Von 18 Pferden sind 4 auszuwählen, wobei die Reihenfolge unerheblich ist.*
Anzahl der 4-Permutationen: $\frac{18!}{14!}$

Jeweils $4!$ *Permutationen führen zum selben Tip: z.B.* $(1,2,3,4) = (1,2,4,3) = (1,3,4,2) = \ldots$

Deshalb gibt es insgesamt $\frac{18!}{14! \cdot 4!} = 3060$ *mögliche Tips.*

Satz 2.4 *Die Anzahl der* k*-Teilmengen aus einer* n*-elementigen Menge ist*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{2.4}$$

Bemerkung 2.1 (Binomialkoeffizienten) *Es gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

z.B. $(a+b)^3 = \underbrace{1}_{\binom{3}{0}} a^3 + \underbrace{3}_{\binom{3}{1}} a^2 b + \underbrace{3}_{\binom{3}{2}} a b^2 + \underbrace{1}_{\binom{3}{3}} b^3$

Bemerkung 2.2 (Pascalsches Dreieck) *Das Pasclasche Dreieck ist nichts anderes, als eine spezielle Anordnung der Binomialkoeffizienten.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array} \quad \text{Das entspricht :} \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Ein Binomialkoeffizient ergibt sich immer aus der Addition der beiden darüber befindlichen. Es folgt also:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Abbildung 2.1: Blaise Pascal (1623-1662)

Beweis 2.1

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.8 (Lotto) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), 6 Richtige beim Lotto (6 aus 49) zu haben?*

$|\Omega| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{13983816}$

Beispiel 2.9 (Lotto) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), 4 Richtige im Lotto zu haben?*

$|\Omega| = \binom{49}{6}$, $|A| = \binom{6}{4}\binom{43}{2}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0.000969 \approx 0.001$

Beispiel 2.10 *Jemand hat 2 Unter in seinen 8 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), dass die beiden restlichen Unter bei einer Person sind?*

$P(A) = \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} \cdot 3 = 0.304$

Beispiel 2.11 (Das Geburtstagsproblem) *Beim Durchsehen der Semesterliste (40 Studierende) fiel auf, dass 2 Studenten am selben Tag Geburtstag haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), dass unter 40 Personen mindestens 2 am selben Tag Geburtstag haben?*

Annahme:

- *1 Jahr = 365 Tage* $\widehat{=} \{1, 2, \ldots, 365\}$
- *Geburtstage sind gleichverteilt*

$|\Omega| = |\{(k_1, k_2, \ldots, k_{40}), k_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\}| = 365^{40}$

$\bar{A}$ = *„Alle Geburtstage sind verschieden“* $\Rightarrow |\bar{A}| = \frac{365!}{326!}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365} = 1 - 0.109 = 0.891$

Beispiel 2.12 (Schafkopf) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, (A) beim Schafkopf einen „Si“ zu bekommen (= 4 Unter + 4 Ober)?*

$\Omega = \{\{k_1, \ldots, k_8\}, k_i \in \{1, 2, \ldots, 32\}\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{32}{8}$

$P(A) = \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10518300}$

Beispiel 2.13 (Schafkopf) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), beim Schafkopf 4 Ober zu erhalten?*

$\Omega = \{k_1, \ldots, k_8\}$

$|\Omega| = \binom{32}{8}$

$|A| = \binom{28}{4}$

$P(A) = \frac{28! \cdot 8! \cdot 24!}{4! \cdot 24! \cdot 32!} = 0.0019$

Beispiel 2.14 (Lotto) *Lottoziehung vom 20.03.1999: 12, 15, 25, 29, 30, 44, Z9, S8, Lottoziehung vom 19.12.1992: 5, 8, 10,11, 18, 31, Z3, S0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), dass beim Lotto 2 oder mehr Zahlen benachbart sind?*

$\overline{A}$ = *„keine Nachbarzahlen“*

6 gezogene Zahlen haben 44 verschiedene Plätze, so dass keine Nachbarn vorkommen, also $\binom{44}{6}$ *Möglichkeiten.*

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} = 1 - 0.505 = 0.495$

Beispiel 2.15 (Münzwurf) *Eine Laplace-Münze wird 10 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), genau 5 Mal Kopf zu haben?*

$|\Omega| = 2^{10},\ |A| = \binom{10}{5}$

$P(A) = \frac{10!}{5! \cdot 5! \cdot 2^{10}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 3}{2^8} = \frac{63}{256} = 0.246$

Beispiel 2.16 (Würfeln) *Wie oft muss man würfeln, um mit 99%iger Wahrscheinlichkeit eine 6 zu haben?*

Experiment: *n Mal würfeln.*

$|\Omega| = |\{(k_1, k_2, \ldots, k_n), k_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}| = 6^n$

$A:$ *„mindestens 1 Sechs"*

$\bar{A}:$ *„keine Sechs"*

$\left|\bar{A}\right| = 5^n$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\left|\bar{A}\right|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.99$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.01 \Rightarrow n \cdot \ln\frac{5}{6} \leq \ln 0.01 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{5}{6}} \approx 25.26$

Man muss mindestens 26 Mal würfeln.

Beispiel 2.17 (Schafkopf) *Jemand hat 2 Unter beim Schafkopf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), dass die beiden restlichen Unter bei einem Mitspieler zusammenstehen?*

$P(A) = \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} \cdot 3 = \frac{22! \cdot 8! \cdot 16!}{6! \cdot 16! \cdot 24!} \cdot 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 3}{24 \cdot 23} = \frac{7}{23} \approx 0.30$

2.2 Das Urnenmodell

Beispiel 2.18 (Urne) *Eine Urne enthält 5 schwarze und 3 weiße Kugeln. Es werden 6 Kugeln gezogen*

a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen

Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 4 schwarze Kugeln zu ziehen?

a) $P(X = 4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{3}{2}}{\binom{8}{6}} = 0.54$

b) $|\Omega| = 8^6$

Eine Anordnung ist z.B. : $\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ$. *Es gibt* $= 5^4 \cdot 3^2$ *Möglichkeiten die Kugeln so zu ziehen. Insgesamt gibt es aber* $\binom{6}{4}$ *Anordnungskombinationen, also insgesamt* $\binom{6}{4} \cdot 5^4 \cdot 3^2$ *Möglichkeiten genau 4 schwarze Kugeln zu ziehen.*

$\Rightarrow P(X=4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot 5^4 \cdot 3^2}{8^6} = 0.32$

Satz 2.5 *In einer Urne befinden sich N Kugeln, S schwarze und N-S weiße. Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.*

a) Ziehen von n Kugeln ohne Zurücklegen

$$P(X=s) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}, \ s \leq S \tag{2.5}$$

b) Ziehen von n Kugeln mit Zurücklegen

$$P(X=s) = \frac{\binom{n}{s} S^s (N-S)^{n-s}}{N^n} = \binom{n}{s} \left(\frac{S}{N}\right)^s \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s} \tag{2.6}$$

Bemerkung 2.3

$$\sum_{s=0}^{n} P(X=s) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \left(\frac{S}{N}\right)^s \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s} =^{*} \left(\frac{S}{N} + \left(1 - \frac{S}{N}\right)\right) = 1^n = 1$$

Beispiel 2.19 (Lotterie) *Eine Lotterie besteht aus 1000 Losen und ist mit 50 Treffern ausgestattet. Jemand kauf 5 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einen Treffer hat?*

$N = 1000, \ S = 50, \ N - S = 950, \ n = 5$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{50}{0}\binom{950}{5}}{\binom{1000}{5}} \approx 0.23$

Beispiel 2.20 *Münzwurf Eine Müneze wird 10 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3 Mal Kopf zu haben?*

$N = 2, \ S = 1, \ N - S = 1, \ n = 10, \ s = 3$

$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3} \cdot 1^3 \cdot 1^7}{2^{10}} \approx 0.12$

*siehe Bemerkung 2.1

Kapitel 3

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel 3.1 (Lotto) *Man stellt bei der Lottoziehung fest, dass die ersten 5 Zahlen richtig sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (A), 6 Richtige zu haben?*

$P(A) = \frac{1}{44}$

Allgemein:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \; P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$

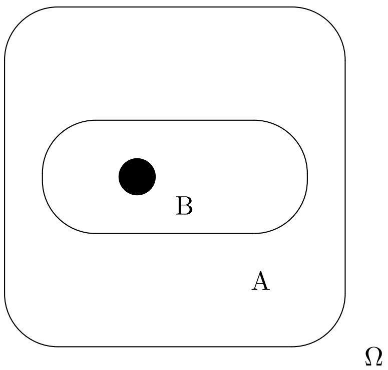

Abbildung 3.1: Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(B|A) =$ „Wahrscheinlichkeit für B wenn A schon eingetreten ist“ $= \frac{|B|}{|A|} = \frac{\frac{|B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Definition 3.1 *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \subset \Omega$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$, dann heißt*

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \tag{3.1}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A.

Im obigen Beispiel:

A : „die ersten 5 Zahlen sind richtig“

B : „alle 6 Zahlen sind richtig“

$P(B|A) = \frac{\frac{1}{\binom{49}{6}}}{\frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{5}}} = \frac{\binom{49}{5}}{\binom{49}{6}\binom{6}{5}} = \frac{49!\cdot 6!\cdot 43!\cdot 5!\cdot 1!}{5!\cdot 44!\cdot 49!\cdot 6!} = \frac{1}{44}$

Beispiel 3.2 (Skat) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (B), dass 2 Buben im Skat sind?*

$P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} \approx 0.012$

Ein bestimmter Spieler hat 10 Karten mit 2 Buben. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit (A), dass 2 Buben im Skat liegen?

A: „Ein bestimmter Spieler hat 2 Buben in der Hand“

$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}} \approx 0.29$

$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}\binom{2}{2}}{\binom{32}{10}\binom{22}{2}}$

$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}\binom{2}{2}\binom{32}{10}}{\binom{32}{10}\binom{22}{2}\binom{4}{2}\binom{28}{8}} = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{22}{2}} \approx 0.00433$

Es gilt allgemein:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Satz 3.1 (Produktregel)

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B)P(C|A \cap B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) \\ P(A \cap B \cap C \cap D) &= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)P(D|A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \quad (3.2)$$

Beispiel 3.3 *Aus einem Kartenspiel (32 Karten) werden 2 Karten gezogen (nacheinander ohne zurücklegen).*

A: 2 Könige werden gezogen

B: 1. Karte ist König

C: 2. Karte ist König

$P(A) = P(B \cap C) = P(B)P(C|B) = \frac{4}{32}\frac{3}{31} \approx 0,012 \left(\text{kombinatorisch}: \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}\right)$

Beispiel 3.4 (Lotto) *A: 6 Richtige. A_1: 1. Zahl richtig, ... , A_6: 6. Zahl richtig.*

$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_6|A_1 \cap \ldots \cap A_5) = \frac{6}{49}\frac{5}{48}\cdots\frac{1}{44}$

3.1 Ereignisbäume

Beispiel 3.5 (Lotto) $A:$ *„die ersten 3 Zahlen sind gerade"*

$G_1:$ *„die erste Zahl ist gerade"*

$G_2:$ *„die zweite Zahl ist gerade"*

$G_3:$ *„die dritte Zahl ist gerade"*

$P(A) = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3)$

$= \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} \cdot \frac{22}{47} \approx 0.11$

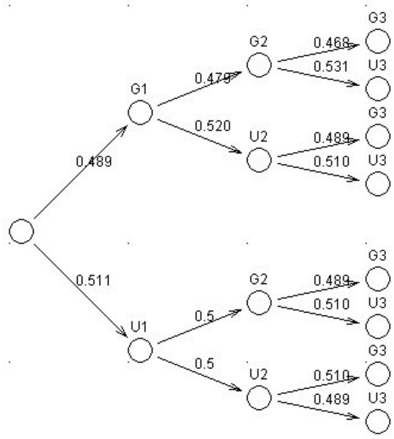

Abbildung 3.2: *Ereignisbaum*

Beispiel 3.6 (Ziegenproblem)

Gewinn bei „Nichtwechseln":

$P = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$

Gewinn bei „Wechseln":

$P = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

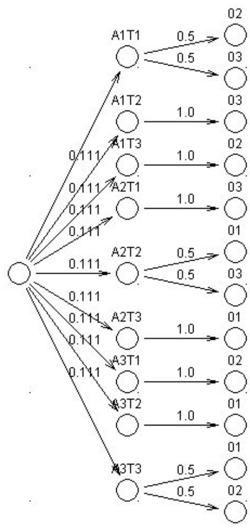

Abbildung 3.3: *Das Ziegenproblem*

Beispiel 3.7 *In einem Betrieb sind 96% der hergestellten Produkte brauchbar. Von jeweils 100 brauchbaren Erzeugnissen sind im Mittel 75 Güteklasse I. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt Güteklasse I hat?*

B : *„Produkt ist brauchbar“*

I : *„Erzeugnis hat Güteklasse I“*

$P(B) = 0.96,\ P(I|B) = 0.75$

$P(B \cap I) = P(B) \cdot P(I|B) = 0.96 \cdot 0.75 = 0.72$

Beispiel 3.8 (Skat)

a) Frage an Nebenspieler: „Hast Du ein As?“

b) Frage an Nebenspieler: „Hast Du Pik As?“

Die Antwort laute in beiden Fällen „Ja“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Nebenspieler ein weiteres As hat?

a) A: Nebenspieler hat mindestens 1 As

B: Nebenspieler hat mindestens 2 Asse

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1-P(\overline{A\cap B})}{1-P(\overline{A})} = \frac{1-\frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}}-\frac{\binom{28}{9}\binom{4}{1}}{\binom{32}{10}}}{1-\frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}}} = \frac{\binom{32}{10}-\binom{28}{10}-4\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}-\binom{28}{10}} \approx 0.46$$

b) A: Nebenspieler hat Pik As

B: Nebenspieler hat Pik As und mindestens 1 weiteres As

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{3}{1}\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}}+\frac{\binom{3}{2}\binom{28}{7}}{\binom{32}{10}}+\frac{\binom{3}{3}\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}}}{\frac{\binom{31}{9}}{\binom{32}{10}}} = \frac{3\binom{28}{8}+3\binom{28}{7}+\binom{28}{6}}{\binom{31}{9}} \approx 0.66$$

Beispiel 3.9 *Jemand hat 2 Kinder.*

a) Frage „Hast Du ein Mädchen?“

b) Frage „Ist Dein erstes Kind ein Mädchen?“

Die Antwort laute in beiden Fällen „Ja“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er 2 Mädchen hat?

a) $P = \frac{|\{(M,M)\}|}{|\{(M,M),(M,K),(K,M)\}|} = \frac{1}{3}$

b) $P = \frac{|\{(M,M)\}|}{|\{(M,M),(M,K)\}|} = \frac{1}{2}$

Beispiel 3.10 *Ein Betrieb hat 96% brauchbare Produkte. Unter den brachbaren Produkten haben 75% Güteklasse II. Unter den Produkten mit Güteklasse II haben 50% sogar Güteklasse I.*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt Güteklasse I hat?

$P = 0.96 \cdot 0.75 \cdot 0.5 = 0.36$

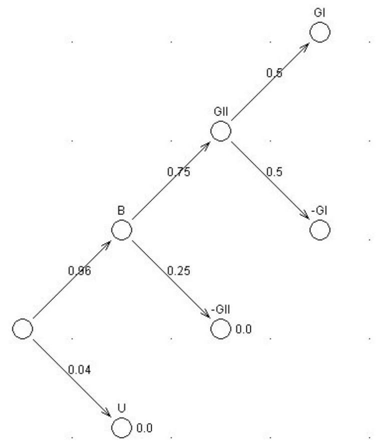

Abbildung 3.4: *Ereignisbaum*

Beispiel 3.11 *Eine Maschine M_1 stellt Widerstände mit Ausschussanteil 4% her. Eine Maschine M_2 stellt 3 Mal soviele Widerstände mit Ausschussanteil 2% her.*
Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein der Gesamtproduktion entnommenes Ausschussstück von M_1?

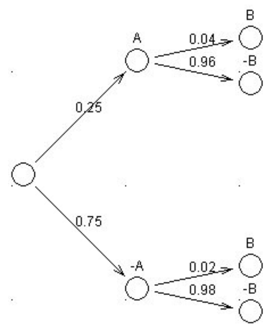

Abbildung 3.5: *Ereignisbaum*

A: Widerstand stammt von M_1

B: Widerstand ist Ausschussstück

gesucht: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

gegeben: $P(A) = \frac{1}{4},\ P(\overline{A}) = \frac{3}{4},\ P(B|A) = \frac{4}{100},\ P(B|\overline{A}) = \frac{2}{100}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{100}$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$

$\frac{1}{100} + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{100} + \frac{3}{4}\frac{2}{100} = \frac{5}{200}$

$\Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{5}{200}} = 0.4$

Satz 3.2 (Formel von Bayes)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} \tag{3.3}$$

Abbildung 3.6: Thomas Bayes (1702-1761)

Beispiel 3.12 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer Infektion, wenn der Patient Fieber hat?*

F : *„Patient hat Fieber"*

I : *„Diagnose ist Infektion"*

bekannt sei: $P(I) = 0.3,\ P(F|I) = 0.9,\ P(F|\overline{I}) = 0.2$

$P(I|F) = \frac{P(I\cap F)}{P(F)} = \frac{0.3\cdot 0.4}{0.3\cdot 0.4+0.7\cdot 0.2} \approx 0.66$

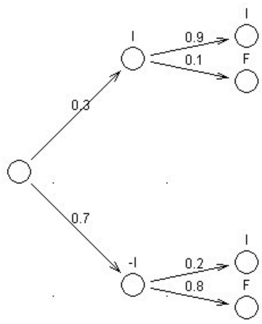

Abbildung 3.7: *Ereignisbaum*

Beispiel 3.13 (Urne)
Urne A hat 9 Kugeln: $1, 2, \ldots 9$
Urne B hat 5 Kugeln: $1, 2, \ldots 5$

Eine Urne wird zufällig ausgewählt und daraus eine Kugel gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Kugel aus Urne A, wenn die Kugelzahl gerade ist?

$P(A|G) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\frac{2}{5}} = \frac{10}{19} \approx 0,53$

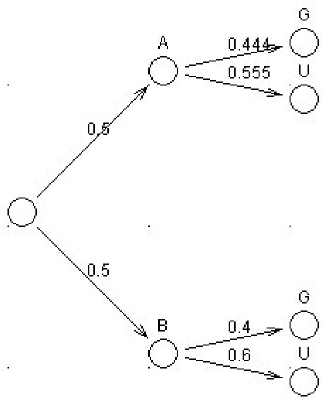

Abbildung 3.8: *Ereignisbaum*

Kapitel 4

Unabhängigkeit

Bemerkung 4.1

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \stackrel{!}{=} P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B) \\ P(B|A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \stackrel{!}{=} P(B) \Rightarrow P(B\cap A) = P(B)P(A) \end{aligned}$$

Definition 4.1 *Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt:*

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \tag{4.1}$$

Beispiel 4.1 (Würfeln) *Es werden 2 Würfel geworfen.*

$A:$ *„1. Würfel 6"*

$B:$ *„2. Würfel 6"*

$$\left.\begin{aligned} P(A)\cdot P(B) &= \tfrac{1}{36} \\ P(A\cap B) &= \tfrac{1}{36} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A,\ B \textit{ sind unabhängig.}$$

Beispiel 4.2

	Prüfung bestanden	*Prüfung nicht bestanden*	$\sum$
Raucher	*10*	*30*	*40*
Nichtraucher	*55*	*5*	*60*
$\sum$	*65*	*35*	*100*

$R:$ *„Student ist Raucher"*

$B:$ *„Student hat Prüfung bestanden"*

$P(R) = 0.4,\ P(B) = 0.65$

$P(B|R) = \frac{P(R\cap B)}{P(R)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$

$P(B|\overline{R}) = \frac{P(\overline{R}\cap B)}{P(\overline{R})} = \frac{0.55}{0.6} \approx 0.92$

Offenbar besteht ein starker Zusammenhang zwischen Prüfung und Raucher. Es ist auch

$$\left.\begin{aligned} P(B)\cdot P(R) &= 0.26 \\ P(B\cap R) &= 0.1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A,\ B \textit{ sind abhängig.}$$

Satz 4.1 *Sind A, B unabhängig, so auch $\overline{A}, B$ und $A, \overline{B}$ und $\overline{A}, \overline{B}$.*

Beweis 4.1 ($\overline{A}, B$)

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$$

$\square$

Die anderen Beweise sind analog zu führen.

Definition 4.2 *Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für jede Auswahl $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}, k \leq n$, aus den $A_1, \ldots, A_n$ gilt*

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{ik})$$

Beispiel 4.3 (Münzwurf) *Es werden 2 Münzen geworfen und folgende Ereignisse betrachtet:*

A: „Höchstens ein Mal Zahl“

B: „Jede Seite wenigstens ein Mal“

Sind A und B unabhängig?

$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$

$P(A) = \frac{3}{4},\ P(B) = \frac{2}{4}$

$$\left.\begin{array}{lcl} P(A) \cdot P(B) & = & \frac{3}{8} \\ P(A \cap B) & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A,\ B \text{ sind abhängig.}$$

Beispiel 4.4 (Münzwurf) *Es werden 3 Münzen geworfen und folgende Ereignisse betrachtet:*

A: „Höchstens ein Mal Zahl“

B: „Jede Seite wenigstens ein Mal“

Sind A und B unabhängig?

$\Omega = \{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ\}$

$P(A) = \frac{4}{8},\ P(B) = \frac{6}{8}$

$$\left.\begin{array}{lcl} P(A) \cdot P(B) & = & \frac{3}{8} \\ P(A \cap B) & = & \frac{3}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow A,\ B \text{ sind unabhängig.}$$

Beispiel 4.5 (Würfeln) *Ein Würfel wird 10 Mal geworfen. Bei diesem Beispiel geht die Annahme, dass die einzelnen Würfe unabhängig sind, in die Berechnung des Ergebnisses ein. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:*

A : *„Es fällt keine 6“*

B : *„Die erste 6 fällt beim letzten Wurf“*

A_i : *6 beim i-ten Wurf*

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}) = P(\overline{A_1}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_{10}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.16 \\
P(B) &= P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_9} \cap A_{10}) = P(\overline{A_1}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_9}) \cdot P(A_{10}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot \frac{1}{6} \approx 0.032
\end{aligned}
$$

Kapitel 5

ZUFALLSGRÖSSEN

Definition 5.1 *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \tag{5.1}$$

heißt eine Zufallsgröße.

Beispiel 5.1 (Würfeln) *Zweimaliges Werfen eines Würfels. X Augensumme. Beim Würfeln wird der Augensumme aus zwei Würfeln die entsprechende Zahl zugeordnet:*

(Eins, Eins) $\xrightarrow{X} 2$
(Eins, Zwei) $\xrightarrow{X} 3$
$\vdots$
(Sechs, Sechs) $\xrightarrow{X} 12$

Definition 5.2 *Die Funktion*

$$P_X : x \longrightarrow P(X = x) \tag{5.2}$$

heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung *von X.*

Beispiel 5.2 (Würfeln) *Zweimaliges werfen eines Würfels. X Augensumme.*

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

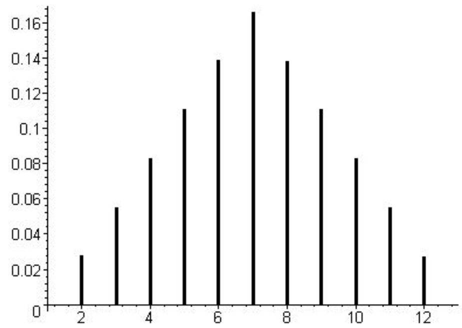

Abbildung 5.1: *P(X)=x*

Beispiel 5.3 (Münzwurf) *Eine Münze wird 3 Mal geworfen.*

X : *„Anzahl der geworfenen K“*

Y : *„Anzahl der Wechsel zwischen K und Z“*

	X	Y
KKK	3	0
KKZ	2	1
KZK	2	2
KZZ	1	1
ZKK	2	1
ZKZ	1	2
ZZK	1	1
ZZZ	0	0

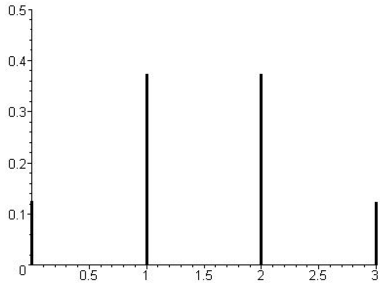

Abbildung 5.2: *P(X)=x*

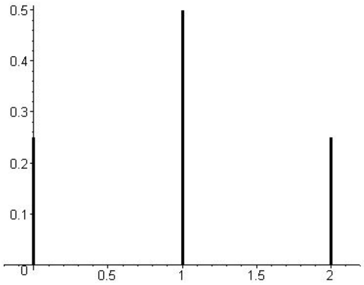

Abbildung 5.3: *P(Y)=y*

Beispiel 5.4 (Münzwurf) *Eine Münze wird solange geworfen, bis zum 1. Mal K erscheint.*

X : *„Anzahl der benötigten Würfe.“*

$\Omega : \{K, ZK, ZZK, ZZZK, ZZZZK, ZZZZZK, \ldots\}$

x	1	2	3	4	5	...
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\sum = 1$

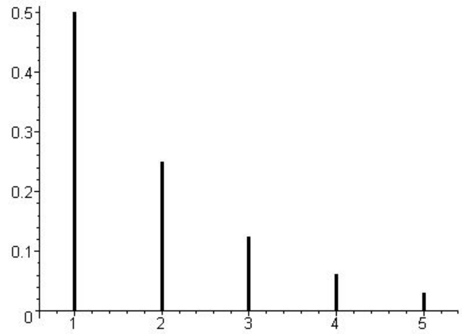

Abbildung 5.4: *P(X)=x*

Beispiel 5.5 (Würfeln) *Ein Würfel wird so lange geworfen, bis zum 1. Mal eine 6 erscheint, höchstens aber 3 Mal.*

X : *„Anzahl der benötigten Würfe.“*

$\Omega : \{6, 16, 26, 36, 46, 56, 111, \ldots, 556\}$

x	1	2	3	
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\sum = 1$

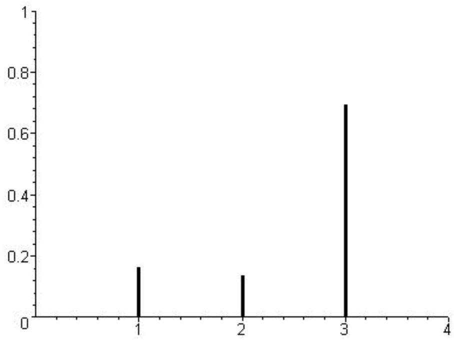

Abbildung 5.5: *P(X)=x*

Definition 5.3 *Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen* unabhängig, *wenn gilt:*

$$P(X = x \text{ und } Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \forall x, y \tag{5.3}$$

Beispiel 5.6 (Würfeln) *Ein Würfel wird 2 Mal geworfen.*

X : *„Augenzahl 1. Wurf“*

Y : „Augenzahl 2. Wurf“

$$\left.\begin{array}{lcl} P(X=1)\cdot P(Y=2) & = & \frac{1}{36} \\ P(X=1 \; und \; Y=2) & = & \frac{1}{36} \\ P(X=x \; und \; Y=y) & = & P(X=x)\cdot P(Y=y), \forall x,y \end{array}\right\} \Rightarrow X,\ Y \ sind \ unabhängig.$$

$Z : max(X, Y)$

$$\left.\begin{array}{lcl} P(X=2) & = & \frac{1}{6} \\ P(Z=1) & = & \frac{1}{36} \\ P(X=2 \; und \; Y=1) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X,\ Z \ sind \ abhängig.$$

Beispiel 5.7 (Münzwurf) *Eine Münze wird 3 Mal geworfen.*

X : „Anzahl K“

Y : „Anzahl Z“

$Z : X - Y$

	KKK	KKZ	KZK	KZZ	ZKK	ZKZ	ZZK	ZZZ
X	3	2	2	1	2	1	1	0
Y	0	1	1	2	1	2	2	3
Y	3	1	1	-1	1	-1	-1	-3

X und Z sind abhängig. Nachweis als Übung!

Kapitel 6

Erwartungswert und Varianz

6.1 Erwartungswert

Beispiel 6.1 (Würfeln) *Ein Würfel wird 2 Mal geworfen, X Augensumme.*

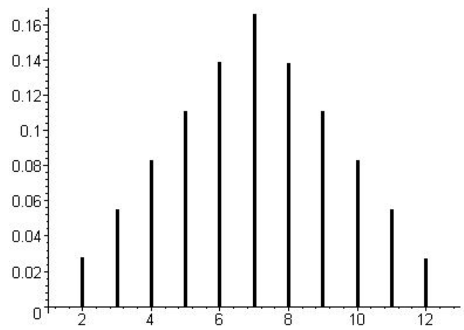

Abbildung 6.1: $P(X = x)$

Der Erwartungswert ist der Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsverteilung. In Zeichen $E(X)$ oder EX.

$E(X) = EX = 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+\ldots+12\cdot\frac{12}{36} = \frac{1}{36}\cdot(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12) = \frac{252}{36} = 7$

Definition 6.1 *Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit den Werten $x_1, x_2, \ldots x_n$.*

$$E(X) = EX = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) \tag{6.1}$$

heißt Erwartungswert *von X.*

Beispiel 6.2 (Würfeln) *Ein Würfel wird 1 Mal geworfen, X Augenzahl.*

$EX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$

Beispiel 6.3 (Glücksspiel) *Es wird mit 2 Würfeln gewürfelt, X Augensumme.*

Der Einsatz des Spiels beträgt 2 €. Die Auszahlung erfolgt nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ll} x=2 & \textit{keine Auszahlung} \\ \vdots & \vdots \\ x=9 & \textit{keine Auszahlung} \\ x=10 & \textit{5 €} \\ x=11 & \textit{10 €} \\ x=12 & \textit{25 €} \end{array}$$

Wie groß ist die Gewinnerwartung des Spielers?

Sei Y der Reingewinn des Spielers pro Spiel.

y	$P(Y=y)$	$y \cdot P(Y=y)$
-2	$\frac{30}{36}$	$-\frac{60}{36}$
3	$\frac{3}{36}$	$\frac{9}{36}$
8	$\frac{2}{36}$	$\frac{16}{36}$
23	$\frac{1}{36}$	$\frac{23}{36}$
$\sum$	1	$-\frac{1}{3}$

Im Schnitt wird der Spieler $\frac{1}{3}$ € pro Spiel verlieren.

Bemerkung 6.1 *Ein Spiel mit Einsatz, bei dem der Erwartungswert des Gewinns/Verlusts gleich 0 ist, heißt fair.*

Beispiel 6.4 (Lotterie) *Ein Lotterie hat folgende Gewinnklassen:*

$$\begin{array}{rl} \textit{10000 €} & \textit{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{1000} \\ \textit{500 €} & \textit{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{100} \\ \textit{10 €} & \textit{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{10} \\ \textit{0 €} & \textit{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{889}{1000} \end{array}$$

Wie groß muss der Einsatz sein, dass ein Gewinn beim Betreiber bleibt?

Sei X der Gewinn des Spielers.

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
$-e$	$\frac{889}{1000}$	$-\frac{889}{1000}e$
$10-e$	$\frac{100}{1000}$	$1-\frac{100}{1000}e$
$500-e$	$\frac{10}{1000}$	$5-\frac{10}{1000}e$
$10000-e$	$\frac{1}{1000}$	$10-\frac{1}{1000}e$
$\sum$	1	$16-e$

Ab einem Einsatz von 16 € lohnt sich das Spiel für den Betreiber.

Beispiel 6.5 (Münzwurf) *Eine Münze wird 4 Mal geworfen.*

X : *„Anzahl von K“*

$$
\begin{array}{rcl}
EX & = & 0\cdot P(X=0) & = & 0\cdot\frac{1}{16}\cdot\binom{4}{0}=0\\
& + & 1\cdot P(X=1) & = & 1\cdot\frac{1}{16}\cdot\binom{4}{1}=\frac{4}{16}\\
& + & 2\cdot P(X=2) & = & 2\cdot\frac{1}{16}\cdot\binom{4}{2}=\frac{12}{16}\\
& + & 3\cdot P(X=3) & = & 3\cdot\frac{1}{16}\cdot\binom{4}{3}=\frac{12}{16}\\
& + & 4\cdot P(X=4) & = & 4\cdot\frac{1}{16}\cdot\binom{4}{4}=\frac{4}{16}\\
\hline
& & & = & \frac{1}{16}\cdot(0+4+12+12+4) \quad =2
\end{array}
$$

Beispiel 6.6 (Würfeln) *Ein Würfel wird 1 Mal geworfen, X Augenzahl.*

$Y = X^2$

$E(X^2) = EY = 1^2P(Y=1^2)+\ldots+6^2P(Y=6^2) = \frac{91}{6} \approx 15.17$

Beispiel 6.7 (Würfeln, Münzwurf) *Gleichzeitiges Würfeln und Werfen einer Münze.*

X : *„Augenzahl bei Würfel“*

Y : *„Anzahl von K bei Münze“*

$Z : X+Y$

Man berechne EZ.

Mögliche Werte für Z sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$
\begin{array}{rcl}
EZ & = & 1\cdot P(X=1) & = & 1\cdot\frac{1}{12}\\
& + & 2\cdot P(X=2) & = & 2\cdot\frac{2}{12}\\
& + & 3\cdot P(X=3) & = & 3\cdot\frac{2}{12}\\
& + & 4\cdot P(X=4) & = & 4\cdot\frac{2}{12}\\
& + & 5\cdot P(X=5) & = & 5\cdot\frac{2}{12}\\
& + & 6\cdot P(X=6) & = & 6\cdot\frac{2}{12}\\
& + & 7\cdot P(X=7) & = & 7\cdot\frac{1}{12}\\
\hline
& & & = & \frac{1}{12}\cdot(0+1+4+6+8+10+12+7) \quad =4
\end{array}
$$

$W : \sqrt{X+Y}$

Man berechne EW.

Mögliche Werte für W sind: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$.

$$
\begin{array}{rcl}
EW & = & \sqrt{1}\cdot P(X=\sqrt{1}) & = & \sqrt{1}\cdot\frac{1}{12}\\
& + & \sqrt{2}\cdot P(X=\sqrt{2}) & = & \sqrt{2}\cdot\frac{2}{12}\\
& + & \sqrt{3}\cdot P(X=\sqrt{3}) & = & \sqrt{3}\cdot\frac{2}{12}\\
& + & \sqrt{4}\cdot P(X=\sqrt{4}) & = & \sqrt{4}\cdot\frac{2}{12}\\
& + & \sqrt{5}\cdot P(X=\sqrt{5}) & = & \sqrt{5}\cdot\frac{2}{12}\\
& + & \sqrt{6}\cdot P(X=\sqrt{6}) & = & \sqrt{6}\cdot\frac{2}{12}\\
& + & \sqrt{7}\cdot P(X=\sqrt{7}) & = & \sqrt{7}\cdot\frac{1}{12}\\
\hline
& & & & \approx 1.12
\end{array}
$$

Man beachte insbesondere: $E(\sqrt{Z}) \neq \sqrt{E(Z)}$

6.2 Varianz

Beispiel 6.8 *Y „streut“ mehr als X:*

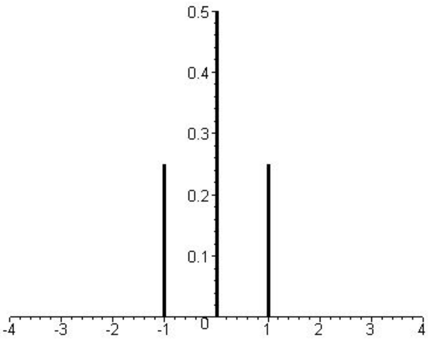

Abbildung 6.2: *P(X)=x*

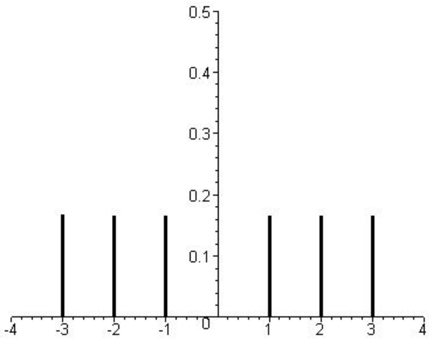

Abbildung 6.3: *P(Y)=y*

Definition 6.2 *Sei X ein Zufallsgröße mit Werten $x_1, \ldots, x_k$ und Erwartungswert $EX = \mu$. Die Zahl*

$$
\begin{aligned}
Var\ X = E((X-\mu)^2) &= (x_1-\mu)^2 \cdot P(X=x_1) + \ldots + (x_k-\mu)^2 \cdot P(X=x_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X=x_i) \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

heißt die Varianz *von X. Die Größe*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var\ X} \qquad (6.3)$$

heißt Standardabweichung *von X.*

Bemerkung 6.2

$$
\begin{aligned}
Var\ X &= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X=x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot P(X=x_i) - \sum_{i=1}^{k} 2x_i\mu \cdot P(X=x_i) + \sum_{i=1}^{k} \mu^2 \cdot P(X=x_i) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot P(X=x_i)}_{E(X^2)} - 2\mu \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X=x_i)}_{E(X)=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{k} P(X=x_i)}_{1} \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - (EX)^2
\end{aligned}
$$

Satz 6.1 (Berechnungsformel für dir Varianz) *Es gilt:*

$$Var\ X = E(X^2) - (EX)^2 \qquad (6.4)$$

Beispiel 6.9 (Würfeln) *Ein Würfel wird 1 Mal geworfen, X Augenzahl,* $EX = \mu = 3.5$

$$\begin{aligned} Var\ X &= (1-3.5)^2\frac{1}{6} + \ldots + (6-3.5)^2\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}(2.5^2 + 1.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2) \\ &= 2.917 \\ \sigma &\approx 1.7 \end{aligned}$$

Berechnung mit Satz 6.1: $Var\ X = 15.17 - 3.5^2 \approx 2.917$

Beispiel 6.10 (Würfeln) *Ein Würfel wird 2 Mal geworfen, X Augensumme.*

Gesucht: $Var\ X = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - 7^2$

$E(X^2) = 2^2 \cdot P(X=2) + \ldots + 12^2 \cdot P(X=12) \approx 54.83$

$\Rightarrow Var\ X = 54.83 - 49 = 5.83,\ \sigma \approx 2.41$

Satz 6.2 (Rechenregeln für den Erwartungswert) *Seien* X, Y *Zufallsgrößen, dann gilt*

(i)

$$E(X+Y) = EX + EY \tag{6.5}$$

(ii)

$$E(aX+b) = aEX + b \tag{6.6}$$

(iii) Sind X, Y *unabhängig, dann gilt*

$$E(XY) = EX \cdot EY \tag{6.7}$$

Satz 6.3 (Rechenregeln für die Varianz) *Seien* X, Y *unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt*

(i)

$$Var\ (X+Y) = Var\ X + Var\ Y \tag{6.8}$$
$$Var\ (X+a) = Var\ X + Var\ a = Var\ X \tag{6.9}$$

(ii)

$$Var\ (aX) = a^2 Var\ X \tag{6.10}$$

Beispiel 6.11 (Würfeln) *Ein Würfel wird 10 Mal geworfen, X Augensumme.*

$EX = 10 \cdot 3.5 = 35$

$Var\ X = 10 \cdot 2.917 = 29.17$

Beispiel 6.12 *Person A bietet Person B folgende Wette an:*

Es soll 12 Mal gewürfelt werden. Nach jedem Wurf mit 1 oder 2 zahlt A an B 3 €. Nach jedem Wurf mit 3, 4, 5 oder 6 zahlt B an A 1 €. Wer gewinnt wie viel?

X_i : *„Gewinn von A bei i-tem Wurf"*

Y : *„Gesamtgewinn von A"*

$EX_i = -3 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} = -\frac{1}{3}$

$EY = E(X_1 + \ldots + X_{12}) = EX_1 + \ldots + EX_{12} = -4$

Es wird ein Gewinn für Person B von 4 € erwartet.

Beispiel 6.13 (Würfeln) *Ein Würfel wird 2 Mal geworfen.*

X : *„Maximum der beiden Würfe"*

Y : *„Minimum der beiden Würfe"*

Gesucht: $EX,\ EY,\ Var\ X,\ Var\ Y,\ E(X+Y)$

x	$P(X=x)$	$xP(X=x)$	x^2	$x^2P(X^2=x^2)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	4	$\frac{12}{36}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$	9	$\frac{45}{36}$
4	$\frac{7}{36}$	$\frac{28}{36}$	16	$\frac{112}{36}$
5	$\frac{9}{36}$	$\frac{45}{36}$	25	$\frac{222}{36}$
6	$\frac{11}{36}$	$\frac{66}{36}$	36	$\frac{396}{36}$
$\sum$	1	$\underbrace{\frac{161}{36} \approx 4.47}_{EX}$		$\underbrace{\frac{791}{36} \approx 21.97}_{E(X^2)}$

$Var\ X = E(X^2) - (EX)^2 = 21.97 - 4.47^2 \approx 1.971$

analog: $EY \approx 2.53,\ Var\ Y \approx 1.971$

$E(X+Y) = EX + EY = 4.47 + 2.53 = 7$

Beispiel 6.14 (Glücksspiel) *In einer Urne seien 3 rote und 7 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.*

X : *„Anzahl der roten Kugeln beim 1. Zug"*

Y : *„Anzahl der roten Kugeln beim 2. Zug"*

Auszahlung: $X + 2 \cdot Y$ *€.*

Wie groß muss der Einsatz sein, dass das Spiel fair ist?

$E(X + 2 \cdot Y) = EX + 2 \cdot EY$

$\Omega = \{RR, RS, SR, SS\}$

$P(RR) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90},\ P(RS) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90},\ P(SR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90},\ P(SS) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

$EX = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3 = 0.3$

$EY = 0 \cdot \frac{63}{90} + 1 \cdot \frac{27}{90} = 0.3$

$E(X + 2 \cdot Y) = 0.3 + 0.6 = 0.9$

Bei einem Einsatz von 0.90 € wäre das Spiel fair.

Beispiel 6.15 (Glücksspiel) *Ein 5 € Stück, 2 € Stück, 1 € Stück wird geworfen. Nach dem Wurf darf der Spieler alle Münzen behalten, die „Zahl" zeigen. Einsatz ist 5 €. Sei Y der Reingewinn der Bank.*

Gesucht: $EY,\ Var\ Y$

Sei $X_1 = \begin{cases} 0 \text{ falls 1 Euro Stück} & = \text{K} \\ 1 \text{ falls 1 Euro Stück} & = \text{Z} \end{cases}$

Sei $X_2 = \begin{cases} 0 \text{ falls 2 Euro Stück} & = \text{K} \\ 1 \text{ falls 2 Euro Stück} & = \text{Z} \end{cases}$

Sei $X_5 = \begin{cases} 0 \text{ falls 5 Euro Stück} & = \text{K} \\ 1 \text{ falls 5 Euro Stück} & = \text{Z} \end{cases}$

$Y = 5 - 1 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - 5 \cdot X_5$

$EY = 5 - 1 \cdot \underbrace{EX_1}_{0.5} - 2 \cdot \underbrace{EX_2}_{0.5} - 5 \cdot \underbrace{EX_5}_{0.5} = 1$

$Var\ Y = Var\ (-1 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - 5 \cdot X_5) = (-1)^2 \cdot Var\ X_1 + (-2)^2 \cdot Var\ X_2 + (-5)^2 \cdot Var\ X_5$

$Var\ X_1 = Var\ X_2 = Var\ X_5 = (0 - 0.5)^2 \cdot 0.5 + (1 - 0.5)^2 \cdot 0.5 = 0.25$

$\Rightarrow Var\ Y = 7.5, \sigma \approx 2.74$

Kapitel 7

Die Ungleichung von Tschebyschef

Abbildung 7.1: Pafnuty Lvovich Tschebyschef (1821-1894)

Sei X eine Zufallsgröße, $EX = \mu$, $Var\ X = \sigma^2$, $c > 0$. Betrachte $P(|X - \mu| \geq c)$.

X habe die Werte $x_1, \ldots, x_k$, $B = \{x_i : |x_i - \mu| \geq c\}$,

$$\begin{aligned} Var\ X &= \sum_{i=0}^{k} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \\ &\geq \sum_{x_i \in B} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \\ &\geq \sum_{x_i \in B} c^2 P(X = x_i) \\ &= c^2 \sum_{x_i \in B} P(X = x_i) \\ &= c^2 P(|X - \mu| \geq c) \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{Var\ X}{c^2}$

Satz 7.1 (Ungleichung von Tschebyschef)

$$P(|X - EX| \geq c) \leq \frac{Var\ X}{c^2} \tag{7.1}$$

$$P(|X - EX| > c) < \frac{Var\ X}{c^2} \tag{7.2}$$

$$P(|X - EX| < c) \geq 1 - \frac{Var\ X}{c^2} \tag{7.3}$$

$$P(|X - EX| \leq c) > 1 - \frac{Var\ X}{c^2} \tag{7.4}$$

Bemerkung 7.1 *Gilt $c^2 \leq Var\ X$, so liefert die Tschbyschef-Ungleichung keine Information.*

Beispiel 7.1 *Das Füllgewicht eines McDonalds Viertelpfünders sei 125g. Abweichungen von 5g sind zulässig. Aufgrund früherer Stichproben weiß man* $\mu = EX = 125,\ \sigma = Var\ X = 7$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf einen Viertelpfünder erwischt, dessen Inhalt leichter als 120g, oder schwerer als 130g ist?

$P(|X - 125| \geq 5) \leq \frac{7}{25} = 0.28$

(d.h. Das Gewicht ist mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 28% außerhalb der zulässigen Toleranz.)

Beispiel 7.2 *Sei X eine Zufallsvariable mit:*

$EX = 0,\ Var\ X = (-1-0)^2 \cdot 0.5 + (1-0)^2 \cdot 0.5 = 1$

exakt: $P(|X - 0| < 1) = 0$

mit Tschebyschef: $P(|X - 0| < 1) \geq 1 - \frac{1}{1^2} = 0$

Tschebyschef ist folglich nicht weiter verbesserbar!

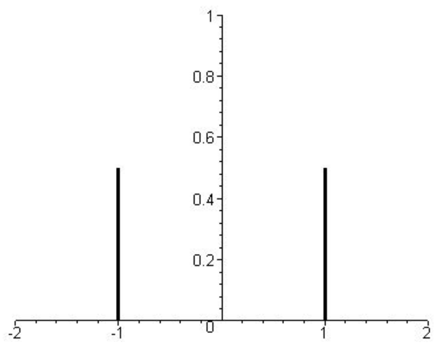

Abbildung 7.2: *P(X)=x*

Beispiel 7.3 *Sei X eine Zufallsvariable mit*

$EX = 0,\ Var\ X = 10$

	exakt	*mit Tschebyschef*
$P(\|X\| < 2)$	0	$\geq 1 - \frac{10}{4} = -1.5$ *(wertlos)*
$P(\|X\| < 3)$	0.5	$\geq 1 - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9}$ *(wertlos)*
$P(\|X\| < 4)$	0.5	$\geq 1 - \frac{10}{16} = 0.375$
$P(\|X\| < 5)$	1	$\geq 1 - \frac{10}{25} = 0.6$
$P(\|X\| \geq 4)$	0.5	$\leq \frac{10}{16} = 0.625$

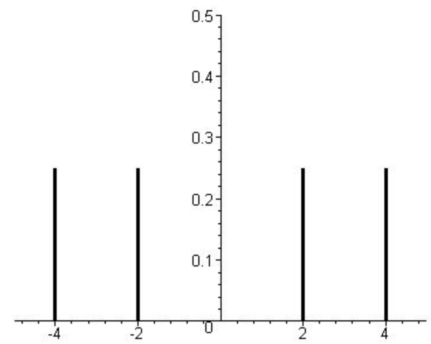

Abbildung 7.3: *P(X)=x*

Definition 7.1 *Gegeben sei ein Zufallsexperiment und eine zugehörige Zufallsgröße X. Das Experiment wird n Mal ausgeführt. Die Zufallsgröße X_i steht für das i-te Experiment. Das n-Tupel* $(X_1, \ldots, X_n)$ *heißt* Stichprobe vom Umfang n von X. *Dabei sind die X_i unabhängig und gleich verteilt wie X mit $EX_i = EX = \mu$, $Var\ X_i = Var\ X = \sigma^2$. Als Schätzwert für $\mu = EX$ eignet sich das arithmetische Mittel.*

$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + \ldots + X_n)$

$E\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot (EX_1 + \ldots EX_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

$Var\ \overline{X} = \frac{1}{n^2} \cdot (Var\ X_1 + \ldots Var\ X_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Satz 7.2 *Bezeichnungen wie oben*

$$E\overline{X} = \mu \tag{7.5}$$
$$Var\ \overline{X} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{7.6}$$
$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{7.7}$$

Bemerkung 7.2 *Je größer die Stichprobe, umso kleiner die Streuung von $\overline{X}$. Soll die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert etwa halbiert werden, so muss der Stichprobenumfang vervierfacht werden.*

Bemerkung 7.3

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq c) \leq \frac{Var\ \overline{X}}{c^2} = \frac{\sigma^2}{nc^2}$$

Satz 7.3 (Tschebyschef Ungleichung für arithmetische Mittel)

$$P\left(|\overline{X} - \mu| \geq c\right) \leq \frac{Var\ X}{nc^2} = \frac{\sigma^2}{nc^2} \tag{7.8}$$
$$P\left(|\overline{X} - \mu| > c\right) < \frac{Var\ X}{nc^2} = \frac{\sigma^2}{nc^2} \tag{7.9}$$
$$P\left(|\overline{X} - \mu| < c\right) \geq 1 - \frac{Var\ X}{nc^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{nc^2} \tag{7.10}$$
$$P\left(|\overline{X} - \mu| \leq c\right) > 1 - \frac{Var\ X}{nc^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{nc^2} \tag{7.11}$$

Beispiel 7.4 (Wartungsvertrag) *Innerhalb eines Jahres werden kostenlos 2 Ersatzteile e_1, e_2 repariert. Die Reparaturkosten für e_1 betragen 100 € und für e_2 200 €. Erfahrungsgemäß fällt jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% im Jahr aus (unabhängig).*

Wie hoch muss der Preis für die jährliche Wartung sein? Wie viele Wartungsverträge müssen laufen, dass die durchschnittlichen Reparaturkosten um weniger als 10 € vom Erwartungswert abweichen und zwar mit einer Wahrscheinlichkeit größer gleich 90 %?

X_1: Reparaturkosten für e_1, X_2: Reparaturkosten für e_2

$EX_1 = 0 \cdot 0.9 + 100 \cdot 0.1 = 10,\ EX_2 = 0 \cdot 0.9 + 200 \cdot 0.1 = 20$

$E(X_1 + X_2) = 30$ *(durchschnittliche jährliche Reparaturkosten $Y = X_1 + X_2$)*

$Var\ Y = Var\ X_1 + Var\ X_2 = (0-10)^2 \cdot 0.9 + (100-10)^2 \cdot 0.1 + (0-20)^2 \cdot 0.9 + (200-20)^2 \cdot 0.1 = 4500$

$P(\left|\overline{Y} - 30\right| < 10 \geq 1 - \frac{4500}{n \cdot 10^2} \Rightarrow n \geq 450$

Beispiel 7.5 (Würfeln) *Ein Würfel wird 50 Mal geworfen, X_i Augenzahl i-ter Wurf. Man gebe eine Abschätzung dafür an, dass der Mittelwert $\overline{X}$ zwischen 3 und 4 liegt.*

$E\overline{X} = 3.5,\ Var\ X_i \approx 2.917^*$

$P(\left|\overline{X} - 3.5\right| < 0.5) \geq 1 - \frac{2.917}{50 \cdot 0.5^2} \approx 0.77$

Beispiel 7.6 *Für das Heiratsalter X lediger Männer gilt stets $Var\ X < 30$ (in Jahren). Zur Schätzung des derzeitig gültigen Alters nimmt man eine Stichprobe von 1000 Männern.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erhaltene Mittelwert $\overline{X}$ vom wahren Mittelwert um weniger als 1 Jahr abweicht?

$P(\left|\overline{X} - \mu\right| < 1) \geq 1 - \frac{Var\ X}{n \cdot 1^2} = 1 - \frac{30}{1000} = 0.97$

Beispiel 7.7 (Münzwurf) *Eine Münze wird 10000 Mal geworfen.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens (nach Tschebyschef) zwischen 4900 und 5100 Mal Kopf zu haben?

Sei $X_i = \begin{cases} 1 \text{ falls i} - \text{ter Wurf} & = \text{K} \\ 0 \text{ falls i} - \text{ter Wurf} & = \text{Z} \end{cases}$

$EX_i = 0.5,\ Var\ X_i = 0.25,\ \sigma(X_i) = 0.5$

$P(4900 \leq \sum_{i=1}^{10000} X_i \leq 5100) = P(\frac{4900}{10000} \leq \sum_{i=1}^{10000} \frac{X_i}{10000} \leq \frac{5100}{10000}) = P(0.49 \leq \overline{X} \leq 0.51)$

$= P(\left|\overline{X} - 0.5\right| \leq 0.01) > 1 - \frac{Var\ X_i}{n \cdot 0.01^2} = 0.75$

Bemerkung 7.4 *Sei X eine Zufallsgröße mit $EX = \mu,\ Var\ X = \sigma^2$. Dann ist*

$$U \quad = \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{7.12}$$

die zu X gehörige standardisierte Zufallsgröße. *Es gilt*

$EU = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} \cdot (EX - \mu) = 0$

$Var\ U = \frac{1}{\sigma^2} \cdot Var\ (X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot Var\ X = 1$

---

*siehe Beispiel 6.9

Kapitel 8

Bernoulli-Experimente

Definition 8.1 *Ein Zufallsexperiment X, das nur die Ergebnisse 0 („Niete“) und 1 („Treffer“) hat heißt* Bernoulli-Experiment.

Bezeichnung:

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = 1 - p = q$$

Abbildung 8.1: Jacob Bernoulli (1654-1705)

Beispiel 8.1

(i) *Münzenwerfen:* $K \hat{=} 1$, $Z \hat{=} 0$; $\quad p = q = 0.5$

(ii) *Würfeln:* $6 \hat{=} 1$, $\overline{6} \hat{=} 0$; $\quad p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

(iii) *Rhesusfaktor bestimmen: positiv* $\hat{=} 1$, *negativ* $\hat{=} 0, p \approx 0.85$

Eine Folge von n unabhängigen Bernoulli-Experimenten heißt Bernoulli-Kette *mit* Trefferwahrscheinlichkeit p *und* Länge n. *Bernoulli-Experminente sind durch Urnenmodelle simulierbar: Ziehen mit Zurücklegen.*

Beispiel 8.2 *In einer Urne befinden sich 2 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es wir 5 Mal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keine schwarze Kugel zu ziehen?*

0 = „weiße Kugel“, $q = \frac{2}{5}$

1 = „schwarze Kugel“, $p = \frac{3}{5}$

P(keine schwarze Kugel) = P(1. Kugel weiß und … und 5. Kugel weiß) = $\left(\frac{2}{5}^5 \approx 0.01\right)$

Zieht man <u>ohne</u> Zurücklegen, liegt <u>keine</u> Bernoulli-Kette vor!

Beispiel 8.3 *Gegeben Bernoulli-Kette der Länge 4 mit $p = 0.3$. Berechne*

(i) *Auf 2 Treffer folgen 2 Nieten*

(ii) *Die ersten 3 Versuche sind erfolgreich*

(iii) *Genau 2 Versuche sind erfolgreich*

Lösung:

(i) $P = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.044$

(ii) $P = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 1 = 0.027$

(iii) $P = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot \binom{4}{2} = 0.26$

Beispiel 8.4 (Mensch ärgere dich nicht) *Beim Beginn von „Mensch ärgere dich nicht“ darf man dreimal würfeln. Wenn eine 6 fällt, darf man starten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man beim ersten Durchgang starten? ($p = \frac{1}{6}$)*

W=1-W(„3 Mal keine 6“) $= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.42$

Beispiel 8.5 *Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt beträgt 0.514. Wieviele Kinder braucht man, um mit 90% er Wahrscheinlichkeit*

(a) *einen Jungen zu kriegen?*

(b) *ein Mädchen zu kriegen?*

Lösung:

(a) *P(mind. 1 Junge) = 1 - P(kein Junge)* $= 1 - (1 - 0.514)^n \geq 0.9$
$\Rightarrow n \geq 3.19$ *(4 Kinder)*

(b) *P(mind. 1 Mädchen) = 1 - P(kein Mädchen)* $= 1 - 0.514^n \geq 0.9$
$\Rightarrow 0.514^n \leq 0.1 \Rightarrow n \ln 0.514 \leq \ln 0.1 \Rightarrow n \geq 3.46$ *(4 Kinder)*

Beispiel 8.6 *Zeuge solange Kinder, bis ein Junge geboren wird.*

$P(J) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$

$P(M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$

X*: Anzahl der Jungen pro Familie,* $EX = 1$.

Y*: Anzahl der Mädchen pro Familie,* $EY = ?$.

y	0	1	2	3	$\ldots$	n	$\sum$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\ldots$	$(\frac{1}{2})^{n+1}$	1
$y \cdot P(Y = y)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\ldots$	$(\frac{n}{2^{n+1}})$	EY

Nebenrechnung (EY):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&\underbrace{=}_{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \\
&= \frac{1}{2} x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \\
&= \frac{1}{2} x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)', \quad |x| < 1 \\
&= \frac{1}{2} x \frac{-(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{x}{(1-x)^2} \\
&\underbrace{=}_{x=\frac{1}{2}} 1
\end{aligned}$$

Beispiel 8.7 (Das Problem des Chevalier de Mere) *Was ist wahrscheinlicher?*

A: Bei 4 Mal würfeln mit 1 Würfel mind. einmal 6

B: Bei 24 Mal würfeln mit 2 Würfeln mind. einmal 6er Pasch

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491$

Beispiel 8.8 (Mensch ärgere dich nicht) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim „Mensch ärgere dich nicht“ nach 5 Startversuchen noch daheim zu sein?*

$W = P(\text{„keine 6“}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{15} = 0.065$

Beispiel 8.9 *Wie oft muss man bei einem Spiel mit*

(a) 1 Würfel

(b) 2 Würfeln

(c) 3 Würfeln

mindestens spielen, um mit 50%iger Wahrscheinlichkeit

(a) wenigsten 1 Sechs ($p = \frac{1}{6}$)

(b) wenigsten 1 Doppelsechs $(p = \frac{1}{36})$

(c) wenigsten 1 Tripelsechs $(p = \frac{1}{216})$

zu werfen?

Lösung:

(a) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.5 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.5}{\ln \frac{5}{6}} = 3.8 \Rightarrow 4$ *Würfe*

(b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0.5 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.5}{\ln \frac{35}{36}} = 24.6 \Rightarrow 25$ *Würfe*

(c) $1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n \geq 0.5 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.5}{\ln \frac{215}{216}} = 149.3 \Rightarrow 150$ *Würfe*

Kapitel 9

Die Binomialverteilung

9.1 Binomialverteilung

Gegeben: Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p.

$B(n,p,k) =$ „Wahrscheinlichkeit, k Treffer zu haben“ $= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Satz 9.1 *Ein Bernoulli-Experiment habe die Trefferwahrscheinlichkeit* p *und die Nietenwahrscheinlichkeit* $1-p=q$*. Dann gilt für eine Bernoulli-Kette der Länge* n*:*

$$B(n,p,k) \quad = \quad \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{9.1}$$

Bemerkung 9.1 *Bernoulli-Kette:* $X_1, \ldots, X_n$

$X = X_1 + \ldots + X_n$ *(Anzahl der Treffer in der Kette)*

$$P(X=k) = B(n,p,k)$$

Definition 9.1 *Die Wahrscheinlichkeitsverteilung*

$$B(n,p) : k \quad \rightarrow \quad \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{9.2}$$

heißt Binomialverteilung *(mit Parametern n, p).*

Beispiel 9.1 $n = 3, \ p = \frac{1}{4}$

$$B(3, \tfrac{1}{4}, 0) = \binom{3}{0} \left(\tfrac{1}{4}\right)^0 \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 \approx 0.42$$
$$B(3, \tfrac{1}{4}, 1) = \binom{3}{1} \left(\tfrac{1}{4}\right)^1 \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \approx 0.42$$
$$B(3, \tfrac{1}{4}, 2) = \binom{3}{2} \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \left(\tfrac{3}{4}\right)^1 \approx 0.14$$
$$B(3, \tfrac{1}{4}, 3) = \binom{3}{3} \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 \left(\tfrac{3}{4}\right)^0 \approx 0.02$$

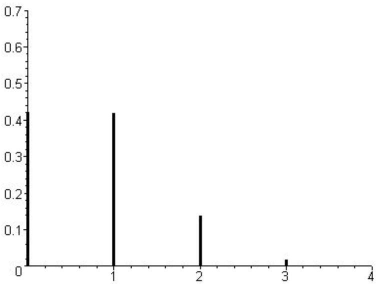

Abbildung 9.1: $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$

Beispiel 9.2 *X Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge 10 mit $p = \frac{1}{4}$*

$P(X = 0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^1 0 \approx 0.06$

$P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.72$

Allgemein:

$EX = EX_1 + \dots EX_n = nEX_1 = n(1p + 0(1-p)) = np$

$Var\ X = Var\ X_1 + \dots Var\ X_n = n((1-p)^2 p + (0-p)^2 q) = n(q^2 p + p^2 q) = npq(q+p) = npq$

Satz 9.2 *Für eine nach $B(n,p)$ verteilte Zufallsvariable X gilt*

$$EX = np \tag{9.3}$$

$$Var\ X = npq \tag{9.4}$$

Beispiel 9.3 (Würfeln) *Ein Würfel wird 100 Mal geworfen, X Anzahl der 6er.*

$EX = 100 \cdot \frac{1}{6} \approx 16.7,\ Var\ X = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 13.9,\ \sigma \approx 3.73$

Bemerkung 9.2 *$B(n,p,k)$ sind tabelliert. Bei der Tabellierung kann man sich auf $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ beschränken, denn*

$$B(n,k,p) = B(n,q,n-k)$$

$P(k \le \text{Trefferzahl} \le m) = \sum_{i=k}^{m} B(n,p,i) = P(-k \ge -\text{Trefferzahl} \ge -m)$

$= P(n-k \ge n - \text{Trefferzahl} \ge n-m) = P(n-m \le \text{Nietenzahl} \le n-k) = \sum_{i=n-m}^{n-k} B(n,q,i)$

Beispiel 9.4 *Prüfungen mit Multiple-Choice-Test. 5 (50) Fragen. Jede Frage hat 3 Antworten, von denen genau eine richtig ist. Prüfung bestanden, wenn 4 (40) Fragen richtig beantwortet.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man die Prüfung besteht, wenn man rein zufällig ankreuzt?

$n = 5(50),\ p = \frac{1}{3},\ X$*: Anzahl richtiger Antworten*

$P(X \ge 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 \approx 0.045$

$P(X \ge 40) = 1 - P(X \le 39) \approx 1 - 1 = 0$

Beispiel 9.5 *Ein Test besteht aus 20 Fragen, die mit ja oder nein zu beantworten sind. Man beantworte die Fragen rein zufällig.*

X : *„Trefferzahl“*, $p = \frac{1}{2},\ n = 20$

$P(X \ge 12) = 1 - P(X \le 11) \approx 1 - 0.74 \approx 0.26$ *(exakt: 0.25, siehe Tabelle)*

$P(X \ge 15) = 1 - P(X \le 14) \approx 1 - 0.98 \approx 0.02$ *(exakt: 0.021, siehe Tabelle)*

$P(8 \le X \le 12) = P(X \le 12) - P(X \le 7) \approx 0.86 - 0.11 \approx 0.75$ *(exakt: 0.74, siehe Tabelle)*

Beispiel 9.6 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 40 Schülern mahr als 2 am Heiligabend Geburtstag haben?* $p = \frac{1}{365},\ n = 40$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \binom{40}{0}\left(\frac{1}{365}\right)^0\left(\frac{364}{365}\right)^{40} - \binom{40}{1}\left(\frac{1}{365}\right)^1\left(\frac{364}{365}\right)^{39} = 0.0054$

Beispiel 9.7 *Der Ausschussanteil eines Massenartikels beträgt 1%. Der Artikel wird in Packungen mit 200 Stück verkauft.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung mehr als 2 defekte Artikel sind?

$p = \frac{1}{100},\ n = 200$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \underbrace{\approx}_{Larson} 1 - 0.7 \approx 0.3$

$exakt: 1 - \left(\binom{200}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{200} + \binom{200}{1}\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^{199} + \binom{200}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^{198}\right) = 0.323$

Beispiel 9.8 (Würfeln) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln 10 Mal hintereinander keine 5 und keine 6 zu haben?*

$n = 10,\ p = \frac{1}{3}$

$P(X = 0) \underbrace{\approx}_{Larson} 0.016$ *(exakt: 0.0173)*

9.2 Binomialverteilung und hypergeometrische Verteilung

Urnenmodell ohne Zurücklegen N Kugeln, S schwarze Kugeln, X Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln, n Anzahl gesamt gezogene Kugeln*.

Definition 9.2 *Die Verteilung*

$$H(N, S, n) : s \quad \rightarrow \quad \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}} \tag{9.5}$$

heißt hypergeometrische *Verteilung.*

Bemerkung 9.3 *$H(N, S, n)$ ist aufwendig zu tabellieren. Für $n \ll N$ ist die hypergeometrische Verteilung gut durch die Binomialverteilung approximierbar*

$$H(N, S, n) \approx B\left(n, \frac{S}{N}\right)$$

Beispiel 9.9 (Lotterie) *Eine Lotterie besteht aus 1000 Losen mit 50 Treffern. Jemand kauft 5 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu haben?*

*siehe Satz 2.5

a) *exakt mit hypergeometrischer Verteilung:*

$N = 1000,\ n = 5,\ S = 50$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{50}{0}\binom{950}{5}}{\binom{1000}{5}} = 1 - \frac{950!\cdot 5!\cdot 995!}{5!\cdot 945!\cdot 1000!} = 1 - \frac{950\cdot 949\cdot 948\cdot 947\cdot 946}{1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996} = 0.2266$

b) *angenähert mit Binomialverteilung*

$n = 5,\ p = \frac{50}{1000} = 0.05$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}(0.05)^0(0.95)^5 \approx 0.2262$

Beispiel 9.10 *Eine Warensendung enthält 80 gute und 20 defekte Stücke. 10 Stück werden gezogen:*

a) *ohne Zurücklegen*

b) *mit Zurücklegen*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 defekte Stücke zu erwischen?

a) $N = 100,\ S = 20,\ n = 10$

$P(X = 2) = \frac{\binom{20}{2}\binom{100-20}{10-2}}{\binom{100}{10}} = 0.3182\ldots$

b) $n = 10,\ p = 0.2$

$P(X = 2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.30199\ldots$

9.3 Ungleichung von Tschebyschef für Bernoulli-Ketten

Satz 9.3 (Ungleichung von Tschebyschef für Bernoulli-Ketten) *Sei X verteilt nach $B(n,p)$ $(EX = np,\ Var\ X = npq)$; $(E\left(\frac{X}{n}\right) = p,\ Var\ \left(\frac{X}{n}\right) = \frac{pq}{n})$.*

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{pq}{n\epsilon^2} \tag{9.6}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{pq}{n\epsilon^2} \tag{9.7}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \epsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2} \tag{9.8}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2} \tag{9.9}$$

Bemerkung 9.4 $pq = p(1-p) = p - p^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ *also* $pq \leq \frac{1}{4}\quad \forall\ p,\ q$. *Also folgt als gröbere, aber von $p,\ q$ unabhängige Abschätzung:*

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2} \tag{9.10}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{1}{4n\epsilon^2} \tag{9.11}$$

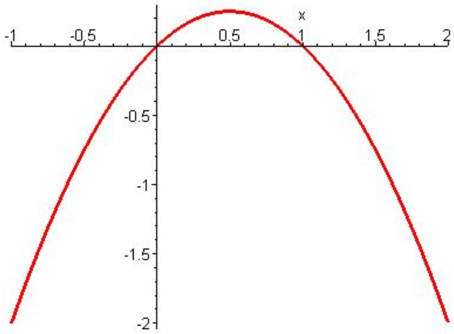

Abbildung 9.2: $p - p^2$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \epsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2} \tag{9.12}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2} \tag{9.13}$$

Beispiel 9.11 *In einem Land werden ca. 600000 Kinder geboren. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei p und soll nach 10 jähriger Beobachtung geschätzt werden durch*

$$\frac{\text{Anzahl der Knabengeburten}}{600000 \cdot 10} \left(\hat{=} \frac{X}{n}\right)$$

auf ein Tausendstel genau.

$P\left(\left|\frac{X}{6000000} - p\right| < \frac{1}{1000}\right) \geq 1 - \frac{1000^2}{4 \cdot 6000000} = 1 - \frac{1}{24} \approx 0.96$

Beispiel 9.12 *Man vermutet, dass in einer Urne gleich viele weiße und schwarze Kugeln sind. Man zieht 1000 Mal eine Kugel mit Zurücklegen. Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Falls $X < 400$ oder $X > 600$ geht man von der Vermutung ab.*

Man gebe eine Schranke an, dass man irrtümlich von der Vermutung abgeht, obwohl sie richtig ist.

$p = \frac{1}{2}$

$P\left(|X - 500| > 100\right) = P\left(\left|\frac{X}{1000} - \frac{1}{2}\right| > 0.1\right) < \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1000 \cdot 0.1^2} = 0.025$

Beispiel 9.13 *Jemand entschließt sich, einen Würfel, der nach 600 Würfen weniger als 80 oder mehr als 120 Sechsen hat, als gezinkt zu bezeichnen.*

(a) Man gebe eine Abschätzung an, dass damit ein fairer Würfel fälschlicherweise beanstandet wird.

(b) Wie müsste die Entscheidungregel lauten, dass dieser Irrtum mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 0.1 passiert?

(a) $P\left(|X - 100| > 20\right) = P\left(\left|\frac{X}{600} - \frac{100}{600}\right| > \frac{20}{600}\right) = P\left(\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{30}\right) < \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{600 \cdot \frac{1}{30}^2} \approx 0.21$

(b) $\frac{pq}{x\epsilon^2} < 0.1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}}{600 \cdot \epsilon^2} \Rightarrow \epsilon > 0.048$ *also* $\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| > 0.048 \Rightarrow |X - 100| > 28.8.$

Der Würfel müsste also beanstandet werden, falls mehr als 128 oder weniger als 72 Sechsen geworfen werden.

Beispiel 9.14 *Wieviele Wahlberechtigte muss man fragen, um mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit das Wahlergebnis für eine Partei voraussagen zu können, mit einem Fehler von höchstens 1%?*

$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<0.01\right)\geq 1-\frac{1}{4\cdot n\cdot 0.01^2}\geq 0.9 \Rightarrow n\geq \frac{1}{4\cdot 0.01^2\cdot 0.1}=25000$

Beispiel 9.15 *Eine Urne enthält einen unbekannten Anteil schwarzer Kugeln. Man gebe eine Abschätzung für die Anzahl der Züge mit Zurücklegen an, die man ausführen muss, dass sich die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ der Treffer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% und höchstens 0.1 vom tatsächlichen Anteil unterscheidet.*

$P\left(\left|\frac{X}{n}-1\right|<0.1\right)\geq 1-\frac{1}{4\cdot n\cdot 0.1^2}\overset{!}{\geq} 0.95$

$\Rightarrow \frac{1}{0.04\cdot n}\leq 0.05 \Rightarrow n\geq 500$

Beispiel 9.16 *Ein Laplace-Würfel wird 500 Mal geworfen. In welchem Intervall liegt mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der geworfenen Sechsen?*

$P\left(\left|\frac{X}{500}-\frac{1}{6}\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{500\cdot\epsilon^2}\overset{!}{\geq} 0.9$

$\Rightarrow \frac{5}{36\cdot 500\cdot\epsilon^2}\leq 0.1 \Rightarrow \epsilon^2\geq\frac{1}{360}\Rightarrow \epsilon\geq\frac{1}{\sqrt{360}}\approx 0.0527$

also für $\epsilon>0.0527$ *gilt* $P\left(\left|\frac{X}{500}-\frac{1}{6}\right|<\epsilon\right)\geq 0.9$

d.h. $\left|\frac{X}{500}-\frac{1}{6}\right|<0.0527\Rightarrow\left|X-\frac{500}{6}\right|<26.35$

also $\underbrace{\dfrac{500}{6}-26.35}_{56.98}<X<\underbrace{\dfrac{500}{6}+26.35}_{109.68}$

also $56<X<110$.

Satz 9.4 (Bernoullisches Gesetz der großen Zahl) *Sei $H_n(A)$ die relative Häufigkeit eines Ereignisses A in einer Bernoulli-Kette der Länge n. Es gelte $P(A)=p$. Dann gilt für jedes $\epsilon>0$:*

$$1\geq\lim_{n\to\infty}P\left(|H_n(A)-p|<\epsilon\right)\geq\lim_{n\to\infty}1-\frac{pq}{n\epsilon^2}=1$$

, also

$$\lim_{n\to\infty}P\left(|H_n(A)-p|<\epsilon\right)=1$$

Man sagt $H_n(A)$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen p *für $n\to\infty$.*

Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wirklichkeit	Mathematische Theorie
Zufallsexperiment	Ergebnisraum, Axiome von Kolmogorov, Unhabhängige Versuche, Bernoulli-Kette
$\downarrow$	$\downarrow$
relative Häufigkeit $H_n(A)$	
$\downarrow$	
empirisches Gesetz der großen Zahl	**Bernoullisches Gesetz der großen Zahl**
$\downarrow$ (Interpretation)	$\Downarrow$
$H_n(A) \to p$ „praktisch sicher“	$H_n(A) \to p$ in Wahrscheinlichkeit

Abbildung 9.3: Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)

9.4 Poisson-Näherung der Binomialverteilung

$$\begin{aligned}
B(n,p,k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \ \mu = np, p = \frac{\mu}{n}, \ q = 1 - \frac{\mu}{n} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\mu^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\mu^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\mu^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}_{=_{n\to\infty} e^{-\mu}\,\dagger} \underbrace{\left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}}_{=_{n\to\infty} 1} \\
&\approx \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}
\end{aligned}$$

Satz 9.5 (Poisson-Verteilung) *Für die Wahrscheinlichkeit $B(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ gilt näherungsweise*

$$B(n,p,k) \approx \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \tag{9.14}$$

die brauchbare Werte liefert für $\frac{\mu}{n} \ll 1$, d.h. p „klein“ und $k \ll n$. Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{\mu} e^{-\mu} = 1$$

†beachte: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

ist die Funktion

$$P(\mu) : k \to \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, k \in \mathbf{N}_0 \tag{9.15}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. $P(\mu)$ *heißt* Poissonverteilung. *Für eine nach* $P(\mu)$ *verteilte Zufallsvaribale* X *gilt*

$$\begin{aligned} EX &= \mu \\ Var\ X &= \mu \end{aligned}$$

Abbildung 9.4: Simeon Denis Poisson (1781-1840)

Beweis 9.1

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\ &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k)!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \cdot e^{\mu} \\ &= \mu \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\mu^k\right)'}{(k-1)!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} \right)' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\mu} \cdot \mu \left(\mu \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\mu}} \right)' \\
&= e^{-\mu} \cdot \mu \cdot (\mu \cdot e^{\mu})' \\
&= e^{-\mu} \cdot \mu \cdot (e^{\mu} + \mu \cdot e^{\mu}) \\
&= \mu + \mu^2
\end{aligned}
$$

$$Var\ X = E(X^2) - (EX)^2 = \mu + \mu^2 - \mu^2 = \mu$$

□

Beispiel 9.17 *X verteilt nach* $P(3),\ \mu = 3.$

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \tfrac{3^0}{0!} e^{-3} \approx 0.05 \\
P(X=1) &= \tfrac{3^1}{1!} e^{-3} \approx 0.15 \\
P(X=2) &= \tfrac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22 \\
P(X=3) &= \tfrac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0.22 \\
P(X=4) &= \tfrac{3^4}{4!} e^{-3} \approx 0.17 \\
P(X=5) &= \tfrac{3^5}{5!} e^{-3} \approx 0.11 \\
P(X=6) &= \tfrac{3^6}{6!} e^{-3} \approx 0.05 \\
\vdots\ &= \vdots \\
P(X=9) &= \tfrac{3^9}{9!} e^{-3} \approx 0.0027
\end{aligned}
$$

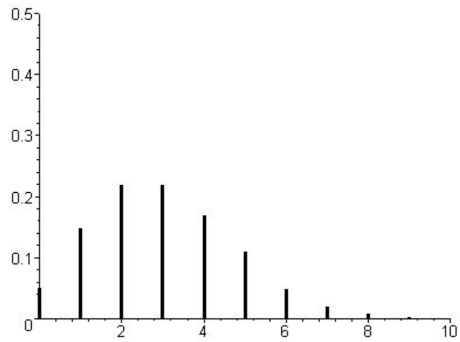

Abbildung 9.5: $P(3),\ \mu = 3$

Beispiel 9.18 (Würfeln) *Ein Würfel wird 6 Mal geworfen, X : Anzahl der Sechsen.*

$p = \frac{1}{6},\ n = 6,\ \mu = np = 1$

$$P(X=1) = \begin{cases} \text{Binomial}: \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.4018 \\ \text{Poisson}: \frac{1}{1!}e^{-1} \approx 0.3678 \end{cases}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = \begin{cases} \text{Binomial}: 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.665 \\ \text{Poisson}: 1 - e^{-}1 \approx 0.632 \end{cases}$$

Beispiel 9.19 *Von 100 Personen ist im Schnitt eine farbenblind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 Personen 2 oder mehr farbenblinde befinden?*

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \underbrace{=}_{n=100, \mu=np=1} \underbrace{\approx}_{Thorndike} 1 - 0.73 = 0.27$$

Beispiel 9.20 (Telepathie-Experiment im Fernsehen) *Ein Medium übermittelt eine 10stellige Zahl an die Fernsehzuschauer telepathisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man als Zuschauer die Zahl errät (A)?*

$P(A) = \frac{1}{10^{10}}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 7 Mio. Fernsehzuschauern jemand zufällig die Zahl errät?

$p = \frac{1}{10^{10}}, n = 7 \cdot 10^6, \mu = np = 0.0007$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{0.0007^0}{0!} \cdot e^{-0.0007} \approx 0.0006997$

exakt: $1 - \binom{7000000}{0} p^0 (1-p)^{7000000} \approx 0.0006997$

Beispiel 9.21 *Die Anzahl $z(k)$ der Tage mit k Verkehrsunfällen in einer Kleinstadt.*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
$z(k)$	47	77	87	74	43	18	10	4	3	1	1	
$k \cdot z(k)$	0	77	174	232	172	90	60	28	24	9	10	876

Pro Tag durchschnittlich: $\frac{876}{365} = 2.4$ *Unfälle. Schätzwert für* $\mu = 2.4$.

Theoretische Verteilung: $P(2.4, k) = \frac{2.4^k}{k!} e^{-2.4}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(2.4, k)$	0.09	0.22	0.26	0.21	0.13	0.06	0.03	0.01			
$365 \cdot P(2.4, k)$	33	79	95	76	46	22	9	3	1	0	0

Beispiel 9.22 (Datenübertragung) *In diesem Beispiel: Steuerinformationen 40bit, Nutzinformationen variabel.*

8bit	*8bit*	*8bit*	Nutzinformationen	*16bit*

allgemein:

v_T *: Transfergeschwindigkeit (Menge der vom Empfänger als korrekt akzeptierten Nutzinformationen)*

$v_Ü$ *: Übertragungsgeschwindigkeit (Übertragene Informationsmenge pro Zeiteinheit, unabhängig von der Korrektheit)*

$\eta = \frac{v_T}{v_Ü}$ *: Wirkungsgrad*

Wie lange muss der Block optimal sein?

Extremfälle: Nutzinformationen = 0 $\Rightarrow v_T = 0$, *Nutzinformationen* $\rightarrow \infty \Rightarrow$ *Block nahezu sicher fehlerhaft* $\Rightarrow$ *wiederholen* $\Rightarrow$ *erneut fehlerhaft,* $\ldots \Rightarrow v_T = 0$.

Nutzinformationen: N bit, Steuerinformationen : R bit, Blocklänge: $L = N + R$, *Bitfehlerwahrscheinlichkeit:* p_f *etwa* $(10^{-3} - 10^{-5})$.

Anzahl der Fehler im Block: X

$$
\begin{aligned}
\eta(L) &= \frac{v_T}{v_Ü} \\
&= \frac{\frac{N \cdot P(X=0)}{\text{Zeiteinheit}}}{\frac{L}{\text{Zeiteinheit}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{L-R}{L} P(X=0) \\
&= \left(1-\frac{R}{L}\right)(1-p_f)^L \\
&\approx \left(1-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-L \cdot p_f}
\end{aligned}
$$

Gesucht ist das Maximum, also muss die Ableitung gleich 0 gesetzt werden.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \eta}{\partial L} \\
&= \frac{R}{L^2} e^{-L \cdot p_f} + \left(1-\frac{R}{L}\right) e^{-L \cdot p_f}(-p_f) \\
&\Rightarrow \frac{R}{L^2} + \left(1-\frac{R}{L}\right)(-p_f) = 0 \\
&\Rightarrow R + \left(L^2 - RL\right)(-p_f) = 0 \\
&\Rightarrow L^2 - RL - \frac{R}{p_f} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow L_{1,2} = \frac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 + 4\frac{R}{p_f}}\right) =^{\ddagger} \frac{1}{2}\left(R + \sqrt{R^2 + 4\frac{R}{p_f}}\right)
$$

Mit den Beispielwerten ergibt sich:

$\Rightarrow L_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\left(40 + \sqrt{40^2 + 4\frac{40}{10^{-4}}}\right) = 652.77$

$\Rightarrow \eta = \left(1 - \frac{40}{652{,}77}\right) \cdot 0.937 = 0.879$

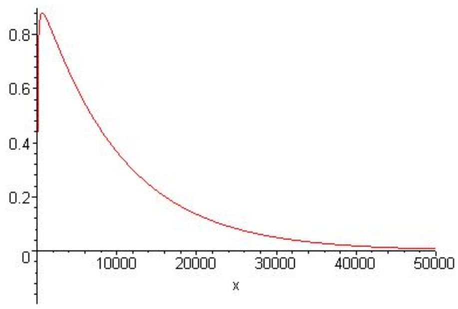

Abbildung 9.6: $\eta(L)$ (mit den Beispielwerten)

‡- ergäbe eine negative Lösung

Kapitel 10

Die Normalverteilung

Bemerkung 10.1 *Sei X verteilt nach $B(n,p), EX = np, Var\ X = npq$.*

Für die standardisierte Zufallsgröße

$$T = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

gilt: $ET = 0$, $Var\ T = 1$. Weiterhin gilt:

$$\lim_{n\to\infty} EX = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} Var\ X = \infty$$

Es stellt sich die Frage: Gegen was „geht“ aber T?

$$\lim_{n\to\infty} ET = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} Var\ T = 1$$

Satz 10.1 *Die* standardisierten *Binomialverteilungen $B(n,p)$ gehen für beliebiges p für $n \to \infty$ gegen die Funktion*

$$\varphi(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{10.1}$$

im folgenden Sinn:

$$P(X \le k) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = P\left(T \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}} \varphi(t)dt$$

Diese Näherung heißt Laplace-Näherung. *Die Werte $P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t)dt$ sind tabelliert. Aufgrund der Nährungsformel gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$. Die Funktion*

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t)dt \tag{10.2}$$

heißt Verteilungsfunktion Φ *der Zufallsgröße T. Die Funktion $\varphi(t)$ heißt* Standard-Normalverteilung.

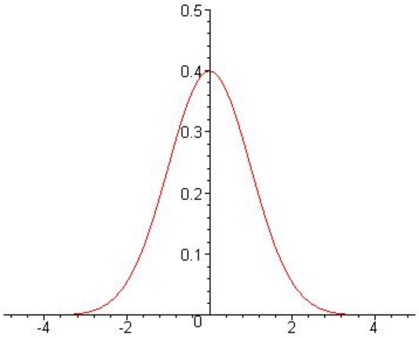

Abbildung 10.1: $\varphi(t)$

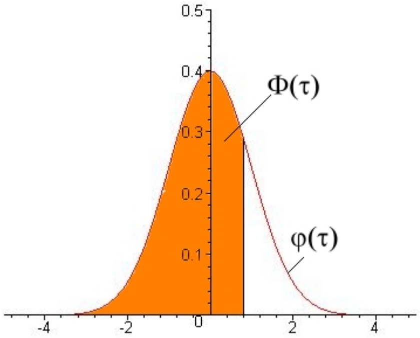

Abbildung 10.2: $\Phi(t)$

Beispiel 10.1 $X \sim B(1000, 0.8),\ \mu = 800,\ \sigma = \sqrt{1000 \cdot 0.8 \cdot 0.2} \approx 12.65$

$$P(800 \leq X \leq 900) = P(X \leq 900) - P(X \leq 799) = P\left(\underbrace{\frac{X-800}{12.65}}_{T} \leq \tfrac{900-800}{12.65}\right) - P\left(\underbrace{\frac{X-800}{12.65}}_{T} \leq \tfrac{799-800}{12.65}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\tfrac{900-800+0.5}{12.65}\right) - \Phi\left(\tfrac{799-800+0.5}{12.65}\right) = \Phi(7.94) - \Phi(-0.04) = 1 - 0.484 = 0.516$$

Satz 10.2 *Sei X verteilt nach $B(n,p)$. Dann gilt*

$$P(X \leq k) \quad \approx \quad \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned} P(k_1 \leq X \leq k_2) &\approx P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1) \\ &= \Phi\left(\frac{k_2-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-1-\mu+0.5}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{k_2-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-\mu-0.5}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{10.4}$$

Bemerkung 10.2 *In manchen Büchern wird etwas gröber angegeben:*

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &\approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma} + \frac{0.5}{\sigma}\right) \\ &\approx\approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

, da für $n \to \infty$ $\frac{0.5}{\sqrt{npq}}$ gegen 0 geht.

Bemerkung 10.3

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ &\approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k-\mu-0.5}{\sigma}\right) \\ &\approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Satz 10.3 *Für große n gilt näherungsweise*

$$\begin{aligned} B(n,p,k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \end{aligned} \tag{10.5}$$

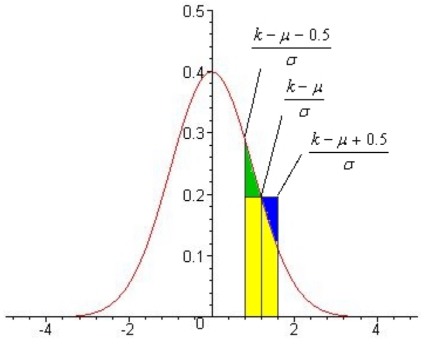

Abbildung 10.3: $P(X=k)$

Bemerkung 10.4 *Hat eine Zufallsgröße X mit $EX=\mu$, $Var\ X=\sigma^2$ die Verteilungsfunktion*

$$\Phi_{\mu,\sigma}(X)=\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

so heißt sie normalverteilt *nach $N(\mu,\sigma)$. Also*

$$B(n,p)\sim N\left(np,\sqrt{npq}\right)$$

für große n.

Bemerkung 10.5 *Es gilt (siehe Abbildung 10.1)*

$$\Phi'=\varphi$$

Beispiel 10.2 *X verteilt nach $B(20,\frac{1}{2})$; $\mu=np=10$, $\sigma^2=npq=5$*

$$\begin{aligned} P(X=12) \quad &= \text{exakt}: \quad \binom{20}{12}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=0.1201\ldots \\ &= \text{Poisson}: \quad \frac{10^{12}}{12!}e^{-10}=0.0947\ldots \\ &= \text{Laplace}: \quad \frac{1}{\sqrt{5\cdot 2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{10-12}{\sqrt{5}}\right)^2}=0.1196\ldots \end{aligned}$$

Beispiel 10.3 *Wahrscheinlichkeit für Knabengeburt: 0.514, pro Jahr 600000 Geburten. X Anzahl Knabengeburten. $X\sim B(600000,0.514)$ ist nicht tabelliert. Poisson ist schlecht geeignet, da p groß.*

$P(308000\le X\le 309000)\approx\Phi\left(\frac{309000-600000\cdot 0.514+0.5}{\sqrt{600000\cdot 0.514\cdot 0.486}}\right)-\Phi\left(\frac{308000-600000\cdot 0.514-0.5}{\sqrt{600000\cdot 0.514\cdot 0.486}}\right)=\Phi(1.55)-\Phi(-1.034)=0.9394-0.1515=0.79$

Beispiel 10.4 (Münzwurf) *Eine Münze wird 10000 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zwischen 4990 und 5010 Mal „Kopf" zu haben?*

$p=\frac{1}{2},\ n=10000$

$P(4990\le X\le 5010)\approx\Phi\left(\frac{5010-50000}{\sqrt{2500}}\right)-\Phi\left(\frac{4990-5000}{\sqrt{2500}}\right)=\Phi(0.2)-\Phi(-0.2)=0.5793-0.4207=0.1586$

Allgemein gilt: $E(X-\mu)=0,\ Var\ (X-\mu)=Var\ X=\sigma^2$

$$\begin{aligned}P(|X-\mu|\le c) &= P(-c\le X-\mu\le c)\\ &\approx \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-0.5}{\sigma}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{c-0.5}{\sigma}\right)\right)\\ &= 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-1\end{aligned}$$

Satz 10.4 *Für große n gilt:*

$$P(|X-\mu|\le c)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-1\approx\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1 \tag{10.6}$$

Beispiel 10.5 *Wie vorher: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Knabengeburten um weniger als 1000 vom Erwartungswert abweicht?*

$P(|X-\mu|\le 1000)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{1000.5}{\sqrt{600000\cdot 0.514\cdot 0.486}}\right)-1=2\cdot\Phi(2.584)-1=2\cdot 0.9951-1=0.9901$

Beispiel 10.6 (Würfeln) *Wie oft darf man einen Würfel höchstens werfen, dass die Anzahl von Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% höchstens 20 vom Erwartungswert abweicht?*

$p=\frac{1}{6},\ \mu=np$

$$P(|X-\mu|\le 20)\approx 2\cdot \underbrace{\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)}_{\Phi\left(\frac{20.5}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)=\Phi\left(\frac{55}{\sqrt{n}}\right)} -1\overset{!}{\ge}0.9$$

$\Rightarrow\Phi\left(\frac{55}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.95\Rightarrow\frac{55}{\sqrt{n}}\ge 1.645\Rightarrow n\le 1117.8$

Beispiel 10.7 *Wie viele Geburten muss man beobachten, dass sich die relative Häufigkeit der Knabengeburten um höchstens 1% vom wahren Wert 0.514 unterscheidet mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% ?*

$$\begin{aligned}P(|X-\mu|\le c) &\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1, \qquad \frac{c}{n}=t\Leftrightarrow c=tn\\ P(|X-np|\le c) &= P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\le\frac{c}{n}\right)\\ \Rightarrow P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\le t\right) &\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{tn}{\sqrt{npq}}\right)-1\\ &= 2\cdot\Phi\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)-1\end{aligned}$$

bei uns:

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-0.514\right|\le 0.01\right)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.514\cdot 0.486}}\right)-1\overset{!}{=}0.99$$

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{0.01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{0.514\cdot 0.486}}\right) &= 0.995\\
\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.514\cdot 0.486}} &= 2.58\\
n &= \left(\frac{2.58}{0.01}\cdot\sqrt{0.514\cdot 0.486}\right)^2\\
&\approx 16564
\end{aligned}$$

Beispiel 10.8 (Wahlumfrage) *Wie viele Wahlberechtigte muss man fragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit vom 90% das Wahlergebnis für eine Partei vorherzusagen, und zwar mit einem Fehler von höchstens 1%?*

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\leq 0.01\right) &\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{0.01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)-1\overset{!}{\geq}0.9\\
\Phi\left(\frac{0.01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) &\geq 0.95\\
\frac{0.01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} &\geq 1.645\\
0.01\cdot\sqrt{n} &\geq \frac{1}{2}\cdot 1.645\geq\sqrt{pq}\cdot 1.645^{*}\\
\sqrt{n} &\geq \frac{1}{2}\cdot 1.645\cdot 100\\
n &\approx 6766
\end{aligned}$$

Beispiel 10.9 (Münzwurf) *Eine Münze wird 1600 Mal geworfen. Man bestimme das kleinste k, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl von K im Intervall* $[800-k;800+k]$ *liegt.*

$$\begin{aligned}
P\left(|X-\mu|\leq c\right) &\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-1\\
P\left(|X-1600\cdot 0.5|\leq k\right) &\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{k+0.5}{20}\right)-1\overset{!}{\geq}0.95\\
\Phi\left(\frac{k+0.5}{20}\right) &\geq 0.975\\
\frac{k+0.5}{20} &\geq 1.96\\
k+0.5 &\geq 39.2\\
k &\geq 38.7
\end{aligned}$$

Das Intervall lautet: $[761;839]$

---

* beachte: $pq\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\sqrt{pq}\leq\frac{1}{2}$

10.1 Der zentrale Grenzwertsatz

Satz 10.5 (Zentraler Grenzwertsatz) *Seien X_i beliebig verteilte, unabhängige Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten μ_i und den Varianzen σ_i^2.*

Dann hat die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ den Erwartungswert $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ und die Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$.

Dann gilt unter sehr schwachen Bedingungen an die X_i, welche in der Praxis immer erfüllt sind

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \quad \text{ist standard} - \text{normalverteilt} \tag{10.7}$$

also

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

ist annähernd standard-normalverteilt für großes n.

Bemerkung 10.6

(i) Oben genannten schwachen Bedingungen stammen von Ljapunow (1901)

(ii) Die X_i selbst müssen nicht normalverteilt sein.

(iii) Faustregel: Satz 10.5 anwendbar ab $n \geq 30$.

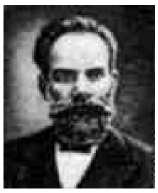

Abbildung 10.4: Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918)

Bemerkung 10.7 *Oft ist es so (z.B. Stichprobe!), dass die X_i gleichverteilt sind (mit unbekannter Verteilung, Mittelwert μ, Standardabweichung σ).*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{ist standard} - \text{normalverteilt.} \tag{10.8}$$

Satz 10.6 *Sei $X_i,\ i = 1,\ldots,n$ eine Stichprobe (d.h. X_i unabhängig und gleichverteilt). Es gelte $EX_i = \mu$; $Var\ X_i = \sigma^2$. Dann ist das arithmetische Mittel $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ annähernd $\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$-normalverteilt für großes n (Faustregel $n \geq 30$).*

Beispiel 10.10 *Um den unbekannten Mittelwert μ der Brenndauer X einer Glühlampe zu ermitteln, wurden $n = 100$ Glühlampen getestet. Der Mittelwert $\overline{X}$ war 1520 Stunden. Aufgrund früherer Versuche wurde $\sigma(X) = 150(h)$ angenommen.*

In welchen Intervall liegt μ mit 95%iger Wahrscheinlichkeit?

Nach Satz 10.6 ist $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{150}{10}} = \frac{\overline{X}-\mu}{15}$ *standard normalverteilt.*

$\Rightarrow -1.96 \leq \frac{\overline{X}-\mu}{15} \leq 1.96$ *mit 95%iger Wahrscheinlichkeit. Also gilt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit:*

$$\begin{array}{llcll}
\Rightarrow & -29.4 & \leq & \overline{X} - \mu & \leq & 29.4 \\
\Rightarrow & -29.4 & \leq & 1520 - \mu & \leq & 29.4 \\
\Rightarrow & -29.4 - 1520 & \leq & -\mu & \leq & -1520 + 29.4 \\
\Rightarrow & 1520 - 29.4 & \leq & \mu & \leq & 1520 + 29.4 \\
\Rightarrow & 1490.6 & \leq & \mu & \leq & 1549.4
\end{array}$$

Beispiel 10.11 *Eine Münze wird 6 Mal geworfen 0 $\hat{=}$ Zahl, 1 $\hat{=}$ Kopf. X_i Ergebnis i-ter Wurf. $X = X_1 + \ldots + X_6$: Anzahl der geworfenen Köpfe.*

Exakt: $X \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right),\ EX = np = 3,\ Var\ X = npq = 1.5$

$$\begin{array}{rcl}
P(X \leq 0) & = & 0.00156 \\
P(X \leq 1) & = & 0.1094 \\
P(X \leq 2) & = & 0.3438 \\
P(X \leq 3) & = & 0.6563 \\
P(X \leq 4) & = & 0.8906 \\
P(X \leq 5) & = & 0.9844 \\
P(X \leq 6) & = & 1.0000
\end{array}$$

Näherungsweise $X \sim N\left(3, \sqrt{1.5}\right)$, *d.h.* $\frac{X-3}{\sqrt{1.5}}$ *ist standard-normalverteilt.* $X \leq k \Leftrightarrow \frac{X-3}{\sqrt{1.5}} \leq \frac{k-3}{\sqrt{1.5}}$.

$$\begin{array}{rclcllcl}
P(X \leq 0) & = & \Phi\left(\frac{-3}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(-2.45) & = & 0.0071 \\
P(X \leq 1) & = & \Phi\left(\frac{-2}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(-1.63) & = & 0.0516 \\
P(X \leq 2) & = & \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(-0.82) & = & 0.2061 \\
P(X \leq 3) & = & \Phi\left(\frac{0}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(0) & = & 0.5 \\
P(X \leq 4) & = & \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(0.82) & = & 0.7393 \\
P(X \leq 5) & = & \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(1.63) & = & 0.9484 \\
P(X \leq 6) & = & \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{1.5}}\right) & = & \Phi(2.45) & = & 0.9929
\end{array}$$

Kapitel 11

Schätzung von Erwartungswert und Varianz

Sei $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe mit $EX_i = \mu$, $Var\ X_i = \sigma^2$. Als Schätzwert für μ nimmt man $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Es gilt $E\overline{X} = \mu$ und $Var\ \overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$.*

Wegen $E\overline{X} = \mu$ sagt man: $\overline{X} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$ ist ein *erwartungstreuer Schätzer* für μ.

Bemerkung 11.1 *Ist $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, so ist auch der Schätzer $\sum_{i=1}^n a_i X_i = \tilde{X}$ erwartungstreu, denn*

$$E\tilde{X} = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu$$

Satz 11.1 *Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe mit $EX_i = \mu$. Unter allen Schätzern $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ (d.h.$\sum_{i=1}^n a_i X_i$ ist erwartungstreu) ist der Schätzer*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \tag{11.1}$$

derjenige mit der kleinsten Varianz, und es gilt

$$Var\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \underbrace{Var\ X_i}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{11.2}$$

Beweis 11.1

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{n}\right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \underbrace{-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n a_i}_{-\frac{2}{n}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2}}_{\frac{1}{n}} \\
&\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{1}{n} \\
\Rightarrow \frac{1}{n} &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2
\end{aligned}$$

*siehe Satz 7.2

$$
\begin{aligned}
Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\ X_i \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\
&\geq \frac{\sigma^2}{n} = Var\ \overline{X}
\end{aligned}
$$

□

Satz 11.2 *Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe mit $EX_i = \mu$, $Var\ X_i = \sigma^2$. Ist der Mittelwert μ der Grundgesamtheit bekannt, so ist*

$$
U^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \tag{11.3}
$$

ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für σ^2.

Beweis 11.2

$$
\begin{aligned}
E(U^2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(EX_i^2 - 2\mu \underbrace{EX_i}_{\mu} + \mu^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(EX_i^2 - \mu^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\ (U^2) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\ \left((X_i - \mu)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var\ \left((X_i - \mu)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot Var\ \left((X_i - \mu)^2 \right)
\end{aligned}
$$

□

Satz 11.3 *Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe mit $EX_i = \mu$, $Var\ X_i = \sigma^2$. Dann ist*

$$
S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 \tag{11.4}
$$

ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für σ^2.

Beweis 11.3 *Ansatz:*

$$S^2 = c \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
ES^2 &= c \cdot E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] \\
\text{Nebenrechnung} & \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu) - \left(\overline{X}-\mu\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\left(\overline{X}-\mu\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}-\mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}\left(\overline{X}-\mu\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}_{\sum_{i=1}^{n}(X_i)-n\mu} + \left(\overline{X}-\mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2\left(\overline{X}-\mu\right)\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}_{\overline{X}} - \mu\right) + \left(\overline{X}-\mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \left(\overline{X}-\mu\right)^2 \\
\text{Ende Nebenrechnung} & \\
&= c \cdot \left[E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) - E\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right] \\
&= c \cdot \left[\sigma^2 - \underbrace{E\left(\overline{X}-\mu\right)^2}_{Var\ \overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}}\right] \\
&= c \cdot \left[\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2\right] \\
&= c \cdot \frac{n-1}{n}\sigma^2 \\
&\overset{!}{=} \sigma^2 \qquad \Rightarrow c = \frac{n}{n-1}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 11.1 *In einer Urne befindet sich eine unbekannte Anzahl von N Kugeln, die von 1 bis N durchnummeriert sind. Es werden n Kugeln zufällig mit Zurücklegen gezogen. Man finde einen erwartungstreuen und konsitenten Schätzer für N.*

X_i*: Nummer der i-ten Ziehung*

$EX_i = 1 \cdot \frac{1}{N} + 2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + N \cdot \frac{1}{N} = (1+2+\ldots+N)\frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad E\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{N+1}{2}$

$\Rightarrow N+1 = 2 \cdot E\overline{X} \Rightarrow N = 2 \cdot E\overline{X} - 1 = E\left(2\overline{X} - 1\right)$

Vorschlag für Schätzer: $2\overline{X} - 1$

Zur Varianz:

$$\begin{aligned}
Var\ (2\overline{X}-1) &= 4 \cdot Var\ \overline{X} \\
&= 4 \cdot Var\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\ X_i \\
&= \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot Var\ X_1 \\
&= \frac{4}{n} Var\ X_1
\end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
Var\ X_1 &= EX_1^2 - (EX_1)^2 \\
&= EX_1^2 - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= 1^2 \cdot \frac{1}{N} + 2^2 \cdot \frac{1}{N} + 3^2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + N^2 \cdot \frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + N^2)\frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \cdot \frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= (N+1) \cdot \left[\frac{2N+1}{6} - \frac{N+1}{4}\right] \\
&= (N+1) \cdot \frac{4N+2-(3N+3)}{12} \\
&= \frac{(N+1)(N-1)}{12} \\
&= \frac{N^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Ende Nebenrechnung

$$= \frac{N^2-1}{3n}$$

Kapitel 12

Testen von Hypothesen

Beispiel 12.1 (Würfeln) *Ein unbekannter (evtl. gezinkter) Würfel soll getestet werden. Dazu würfelt man 100 Mal. X_i: Augenzahl i-ter Wurf. Sei ξ der (unbekannte) Mittelwert des Würfels.*

Hypothese $H_0 : \xi = 3.5$

Ist $\overline{X}$ nahe an 3.5	*H_0 wird angenommen.*
Ist $\overline{X}$ weit weg von 3.5	*H_0 wird abgelehnt.*

mögliche Fehlerarten:

	H_0 ist wahr	*H_0 ist falsch*
H_0 wird angenommen	*OK*	*Fehler 1*
H_0 wird abgelehnt	*Fehler 2*	*OK*

Obwohl Fehler 1 und Fehler 2 symmetrisch sind, wird in der Praxis so verfahren, dass Fehler 2 vermieden werden soll.

Unter der Annahme, dass H_0 wahr ist, gilt nach Satz 10.6

$$\overline{X} \sim N\left(3.5;\ \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right) = N(3.5;\ 0.17),$$

also $\frac{\overline{X}-3.5}{0.17}$ ist standard-normalverteilt.

$$\begin{array}{llclcl}
\Rightarrow & -1.96 & \leq & \frac{\overline{X}-3.5}{0.17} & \leq & 1.96 \\
\Rightarrow & -1.96 \cdot 0.17 & \leq & \overline{X} - 3.5 & \leq & 1.96 \cdot 0.17 \\
\Rightarrow & 3.5 - 1.96 \cdot 0.17 & \leq & \overline{X} & \leq & 3.5 + 1.96 \cdot 0.17 \\
\Rightarrow & 3.17 & \leq & \overline{X} & \leq & 3.83
\end{array}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 richtig ist, ist $< 5\%$. Man sagt: H_0 wird angenommen mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit *von 95%. Die Zahl 1 - Sicherheitswahrscheinlichkeit heißt auch* Irrtumswahrscheinlichkeit *(bei uns 5%), oder auch* Signifikanzniveau.

Beispiele für $\lambda_{P\%}$

$\lambda_{90\%} = 1.645$

$\lambda_{95\%} = 1.96$

$\lambda_{99\%} = 2.58$

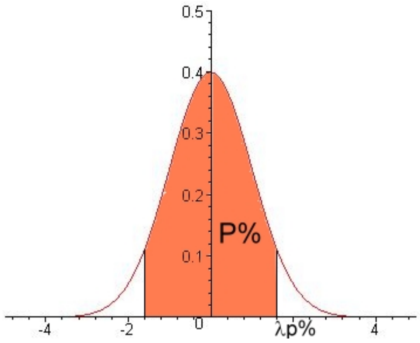

Abbildung 12.1: $\lambda_{P\%}$

Test der Hypothese $\xi = \xi_0$ gegen die Alternative $\xi \neq \xi_0$ bei **bekanntem** σ	
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \xi = \xi_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
Entscheidung	$\left\lvert \frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right\rvert \leq \lambda_{P\%} \Rightarrow$ **Annahme** der Hypothese
	$\left\lvert \frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right\rvert > \lambda_{P\%} \Rightarrow$ **Ablehnung** der Hypothese

(Dieser Test ist zulässig, wenn angenommen werden darf, dass $\overline{X}$ normalverteilt ist.*)

P% heißt die Sicherheitswahrscheinlichkeit des Tests. 100 - P% heißt Irrtumswahrscheinlichkeit (auch Signifikanzniveau).

Beispiel 12.2 *Das Gewicht einer Viertelpfünder-Produktion soll überprüft werden. Dazu werden 500 Viertelpfünder gewogen. Es ergab sich (X_i: Gewicht des i-ten Viertelpfünders)*

$$\overline{x} = \frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500} x_i = 124$$

Kann die Hypothese $H_0: \ \xi = 125$ mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99% abgelehnt werden? Aus früheren Tests weiß man, dass die Standardabweichung des Gewichts $\sigma = 10$ ist.

$$\left\lvert \frac{\overline{x} - 125}{\frac{10}{\sqrt{500}}} \right\rvert = \left\lvert \sqrt{5}(\overline{x} - 125) \right\rvert = \left\lvert -\sqrt{5} \right\rvert = 2.236$$

$\lambda_{99\%} = 2.58 \Rightarrow$ *Hypothese kann nicht abgelehnt werden mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99%. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% ($\lambda_{95\%} = 1.96$) würde die Hypothese abgelehnt.*

*vgl. Zentraler Grenzwertsatz (10.5)

Beispiel 12.3 *Eine Münze wird überprüft durch 30maliges Werfen:*

ZZKKZZZKKZZZKKZKKZKKZZKZZKKZZZ (13x K, 17x Z)

$X_i : 0$, *falls i-ter Wurf Z,* $X_i : 1$, *falls i-ter Wurf K.* $\overline{X} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i$

Hypothese $H_0 : \ \xi = \frac{1}{2}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\left| \frac{\overline{x} - \frac{1}{2}}{\frac{\sigma}{\sqrt{30}}} \right| = \left| \frac{\frac{13}{30} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{30}}} \right| = 0.73$$

Die Hypothese wird mit 90%iger Sicherheitswahrscheinlichkeit nicht abgelehnt.

Definition 12.1 *Die Funktion*

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad -\infty < t < \infty \tag{12.1}$$

ist die Dichtefunktion der sogenannten Student-Verteilung mit n Freiheitsgraden *(auch* t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.*) Stets gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1$$

Die Funktion

$$F_n(Z) = \int_{-\infty}^{Z} f_n(t)dt \tag{12.2}$$

heißt Verteilungsfunktion *der Student-Verteilung.* $F_n(Z)$ *ist tabelliert.*

Bemerkung 12.1 *„Student": Pseudonym für W. S. Gosset*

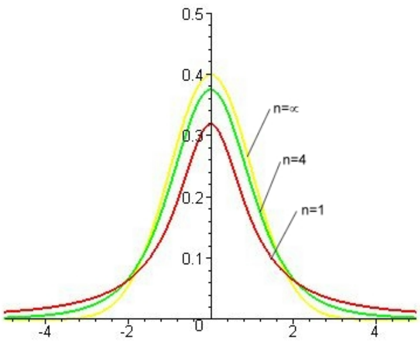

Abbildung 12.2: $f_n(t)$

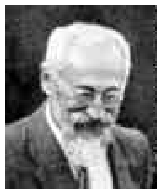

Abbildung 12.3: *William Sealey* GOSSET (1876-1937)

Bemerkung 12.2 *Im Fall* $n = \infty$ *hat man die Normalverteilung, d.h.*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}}$$

Satz 12.1 *Sei* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *eine Stichprobe aus einer* $(\xi,\ \sigma)$*-normalverteilten Grundgesamtheit. Sei* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *(Schätzung für Mittelwert), sowie* $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ *(Schätzung* *für Varianz). Dann ist*

$$T = \frac{\overline{X} - \xi}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \tag{12.3}$$

Student-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Berechnung:

Beispiele für $\gamma_{P\%}$

$\gamma_{90\%}^{(10)} = 1.81$

$\gamma_{95\%}^{(10)} = 2.23$

$\gamma_{99\%}^{(10)} = 3.17$

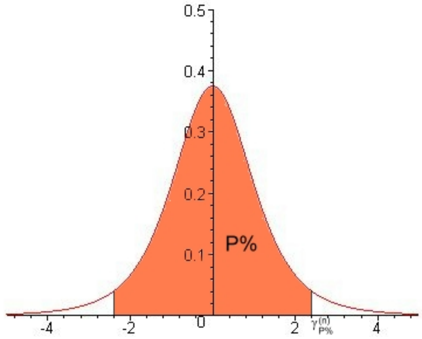

Abbildung 12.4: Student-verteilung mit n Freiheitsgraden

Test der Hypothese $\xi = \xi_0$ gegen die Alternative $\xi \neq \xi_0$ bei **unbekanntem** σ		
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \xi = \xi_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%	
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n$	$\Rightarrow \ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\Rightarrow \ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$\Rightarrow \ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\Rightarrow \ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
Entscheidung	$\left\lvert\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right\rvert \leq \gamma_{P\%}^{(n-1)} \Rightarrow$ **Annahme** der Hypothese	
	$\left\lvert\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right\rvert > \gamma_{P\%}^{(n-1)} \Rightarrow$ **Ablehnung** der Hypothese	

(Dieser Test ist zulässig, wenn angenommen werden darf, dass $\overline{X}$ normalverteilt ist.†)

Beispiel 12.4 *Bei der Prüfung der Druckfestigkeit von 6 Betonwürfeln wurden folgende Werte gemessen:*

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 180 \\ x_2 & = & 175 \\ x_3 & = & 182 \\ x_4 & = & 185 \\ x_5 & = & 186 \\ x_6 & = & 182 \end{array} \quad [kg/cm^3]$$

† vgl. Zentraler Grenzwertsatz (10.5)

Die Hypothese $H_0: \ \xi = 180$ soll mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% getestet werden (Annahme: X_i normalverteilt).

$\overline{x} = \frac{1}{6}(180 + 175 + 182 + 185 + 186 + 182) = 181.67$

$s^2 = \frac{1}{5}(1.67^2 + 6.67^2 + 0.33^2 + 3.33^2 + 4.33^2 + 0.33^2) = 15.47 \Rightarrow s = 3.93$

$$\left| \frac{\overline{x} - 180}{\frac{3.93}{\sqrt{6}}} \right| = \left| \frac{1.67 \cdot \sqrt{6}}{3.93} \right| = 1.04, \qquad \gamma^{(5)}_{95\%} = 2.57$$

$\Rightarrow$ *Hypothese wird angenommen.*

12.1 Einseitige Tests

Test der Hypothese $\xi \geq \xi_0$ gegen die Alternative $\xi < \xi_0$ bei **unbekanntem** σ	
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \xi \geq \xi_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \ \Rightarrow \ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\Rightarrow \ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \ \Rightarrow \ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\Rightarrow \ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
Entscheidung	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq \gamma^{(n-1)}_{P\%,\ \text{einseitig rechts}} \Rightarrow$ **Annahme** der Hypothese $\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < \gamma^{(n-1)}_{P\%,\ \text{einseitig rechts}} \Rightarrow$ **Ablehnung** der Hypothese

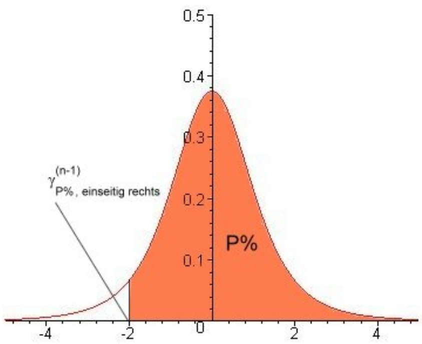

Abbildung 12.5: Student-verteilung mit n-1 Freiheitsgraden

Test der Hypothese $\xi \leq \xi_0$ gegen die Alternative $\xi > \xi_0$ bei **unbekanntem** σ	
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \xi \leq \xi_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \ \Rightarrow \ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ $\Rightarrow \ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \ \Rightarrow \ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ $\Rightarrow \ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$
Entscheidung	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq \gamma^{(n-1)}_{P\%, \text{ einseitig links}} \Rightarrow$ **Annahme** der Hypothese
	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > \gamma^{(n-1)}_{P\%, \text{ einseitig links}} \Rightarrow$ **Ablehnung** der Hypothese

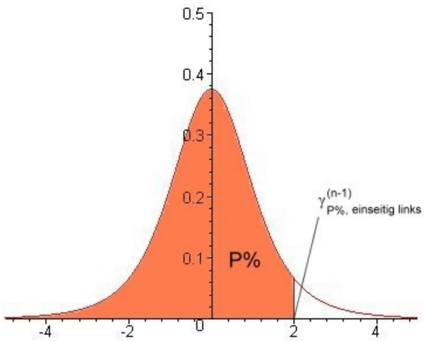

Abbildung 12.6: Student-verteilung mit n-1 Freiheitsgraden

Bemerkung 12.3 *Analog: einseitige Tests mit bekanntem σ (ersetze $\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ durch $\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ und $\gamma^{(n-1)}_{P\%, \text{ einseitig } \ldots}$ durch $\lambda_{P\%, \text{ einseitig } \ldots}$).*

Test der Hypothese $\xi \geq \xi_0$ gegen die Alternative $\xi < \xi_0$ bei **bekanntem** σ	
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \xi \geq \xi_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
Entscheidung	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \lambda_{P\%, \text{ einseitig rechts}} \Rightarrow$ **Annahme** der Hypothese
	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda_{P\%, \text{ einseitig rechts}} \Rightarrow$ **Ablehnung** der Hypothese

Test der Hypothese $\xi \leq \xi_0$ gegen die Alternative $\xi > \xi_0$ bei **bekanntem** σ	
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \xi \leq \xi_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Entscheidung	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \lambda_{P\%,\text{ einseitig links}} \Rightarrow$ **Annahme** der Hypothese
	$\frac{\overline{x}-\xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \lambda_{P\%,\text{ einseitig links}} \Rightarrow$ **Ablehnung** der Hypothese

Beispiel 12.5 (Oktoberfest) *Getestet wird die ausgeschenkte Flüssigkeitsmenge in den Maßkrügen (in g).*

Hypothese: $\xi = 1000g$, *Sicherheitswahrscheinlichkeit 99%*

Gewogen werden 10 Inhalte: 997, 990, 1000, 993, 980, 1001, 982, 987, 990, 991

$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot (997 + 990 + \ldots + 991) = 991.1$

$s^2 = \frac{1}{9} \cdot (5.9^2 + 1.1^2 + \ldots + 0.1^2) = 48.99, \qquad s = \sqrt{48.99} \approx 7.0$

$$\left|\frac{\overline{x}-\xi}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{991.1 - 1000}{\frac{7.0}{\sqrt{10}}}\right| = 4.02$$

$\gamma^9_{99\%} = 3.25 \ \Rightarrow \ H_0$ *wird abgelehnt.*

Beispiel 12.6 (Oktoberfest) *Getestet wird die ausgeschenkte Flüssigkeitsmenge in den Maßkrügen (in g).*

Hypothese: $\xi \geq 1000g$ *gegen* $\xi < 1000g$, *Sicherheitswahrscheinlichkeit 99%*

Gewogen werden 10 Inhalte: 997, 990, 1000, 993, 980, 1001, 982, 987, 990, 991

$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot (997 + 990 + \ldots + 991) = 991.1$

$s^2 = \frac{1}{9} \cdot (5.9^2 + 1.1^2 + \ldots + 0.1^2) = 48.99, \qquad s = \sqrt{48.99} \approx 7.0$

$$\frac{\overline{x}-\xi}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{991.1 - 1000}{\frac{7.0}{\sqrt{10}}} = -4.02$$

$\gamma^9_{99\%,\text{einseitig rechts}} = -2.82 \ \Rightarrow \ H_0$ *wird abgelehnt.*

Beispiel 12.7 *Gesucht ist ein Intervall, in dem sich mit 95%iger Wahrscheinlichkeit das Durchschnittsgewicht der Studierenden der FHM befindet.* *<u>Annahme</u>: Gewichtsverteilung ist normalverteilt.*

Stichprobe: 73, 70, 85, 90, 80, 75, 77, 78, 80, 82

$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot (73 + 70 + \ldots + 82) = 77.6$

$s^2 = \frac{1}{9} \cdot (4.6^2 + 7.6^2 + \ldots + 4.4^2) = 50.49, \qquad s = \sqrt{50.49} \approx 7.1$

$$\begin{array}{lllll} \Rightarrow & -\gamma^9_{95\%} & \leq & \frac{\overline{x}-\xi}{\frac{s}{\sqrt{n}}} & \leq & \gamma^9_{95\%} \\ \Rightarrow & -2.26 & \leq & \frac{77.6-\xi}{\frac{7.1}{\sqrt{10}}} & \leq & 2.26 \\ \Rightarrow & -5.07 & \leq & 77.6-\xi & \leq & 5.07 \\ \Rightarrow & -82.7 & \leq & \xi & \leq & -72.5 \\ \Rightarrow & 72.5 & \leq & \xi & \leq & 82.7 \end{array}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

Das Durchschnittsgewicht liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit zwischen 72.5 kg und 82.7 kg.

12.2 Die χ^2-Verteilung

Definition 12.2 *Die Funktion*

$$h_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x \leq \infty \tag{12.4}$$

ist die Dichtefunktion der χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung) *mit n Freiheitsgraden. Stets gilt*

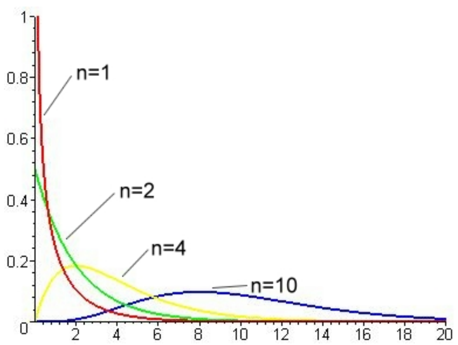

Abbildung 12.7: χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$$\int_0^\infty h_n(x)dx = 1$$

. Die Funktion

$$H_n(z) = \int_0^z h_n(t)dt \tag{12.5}$$

ist tabelliert.

Beispiele für $P\%$-Intervalle:

95% bei $h_{10}(x) = [3.25,\ 20.48]$.

90% bei $h_{23}(x) = [13.1,\ 35.2]$.

99% bei $h_{88}(x) \approx [57,\ 126]$ (linear approximiert).

90% bei $h_{300}(x) = [260.7,\ 341]$.

Satz 12.2 *Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe aus einer $(\xi,\ \sigma)$-normalverteilten Grundgesamtheit. Sei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$*

Dann besitzt

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \tag{12.6}$$

eine χ^2-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden.

12.2.1 Zweiseitige Tests

Test der Hypothese $\sigma = \sigma_0$ gegen die Alternative $\sigma \neq \sigma_0$		
Vorgegeben	Hypothese $H_0:\ \sigma = \sigma_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%	
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ $\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$	
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ $\Rightarrow s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$	
Entscheidung	$\left.\begin{array}{l} \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^{2\ (n-1)}_{L,\ P\%} \\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^{2\ (n-1)}_{R,\ P\%} \end{array}\right\}$	**Ablehnung** von H_0
	$\chi^{2\ (n-1)}_{L,\ P\%} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^{2\ (n-1)}_{R,\ P\%}$	**Annahme** von H_0

(Dieser Test ist zulässig, wenn angenommen werden darf, dass X_i aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ist.‡)

Beispiel 12.8 (Oktoberfest) *Getestet wird die ausgeschenkte Flüssigkeitsmenge in den Maßkrügen (in g).*

Hypothese: $\sigma = 5$, Sicherheitswahrscheinlichkeit 95%

Gewogen werden 10 Inhalte: 997, 990, 1000, 993, 980, 1001, 982, 987, 990, 991

$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot (997 + 990 + \ldots + 991) = 991.1$

‡vgl. Zentraler Grenzwertsatz (10.5)

$s^2 = \frac{1}{9} \cdot (5.9^2 + 1.1^2 + \ldots + 0.1^2) = 48.99, \qquad s = \sqrt{48.99} \approx 7.0$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 48.99}{5^2} = 17.63$$

$\chi^{2\ (9)}_{L,\ 95\%} = 2.70,\ \chi^{2\ (9)}_{R,\ 95\%} = 19.02 \ \Rightarrow\ H_0$ *wird angenommen.*

Bemerkung: *Hätte man als Sicherheitswahrscheinlichkeit nur 90% gefordert, so hätte man* $\chi^{2\ (9)}_{L,\ 90\%} = 3.33,\ \chi^{2\ (9)}_{R,\ 90\%} = 16.92$ *und* H_0 *abgelehnt.*

12.2.2 Einseitige Tests

Test der Hypothese $\sigma \geq \sigma_0$ gegen die Alternative $\sigma < \sigma_0$	
Vorgegeben	Hypothese $H_0:\ \sigma \geq \sigma_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \ \Rightarrow\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ $\Rightarrow\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \ \Rightarrow\ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ $\Rightarrow\ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$
Entscheidung	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^{2\ (n-1)}_{P\%,\ \text{einseitig rechts}} \Rightarrow$ **Ablehnung** von H_0
	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \geq \chi^{2\ (n-1)}_{P\%,\ \text{einseitig rechts}} \Rightarrow$ **Annahme** von H_0

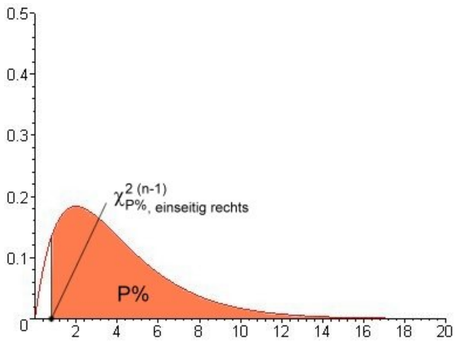

Abbildung 12.8: $\chi^{2\ (n-1)}_{P\%,\ \text{einseitig rechts}}$

Test der Hypothese $\sigma \leq \sigma_0$ gegen die Alternative $\sigma > \sigma_0$	
Vorgegeben	Hypothese $H_0: \ \sigma \geq \sigma_0$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \ \Rightarrow \ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ $\Rightarrow \ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \ \Rightarrow \ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ $\Rightarrow \ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$
Entscheidung	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \chi^{2\ (n-1)}_{P\%,\text{ einseitig links}}$ ⇒ **Ablehnung** von H_0 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^{2\ (n-1)}_{P\%,\text{ einseitig links}}$ ⇒ **Annahme** von H_0

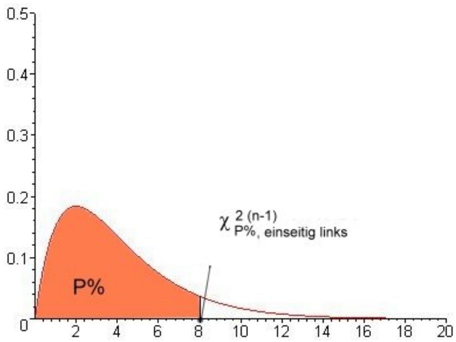

Abbildung 12.9: $\chi^{2\ (n-1)}_{P\%,\text{ einseitig links}}$

Beispiel 12.9 *Körpergröße der Studierenden (Ann. normalverteilt).*

Vorgegeben $H_0: \xi = 180$, $\tilde{H}_0: \sigma = 10$, *Sicherheitswahrscheinlichkeit 95%.*

Stichprobe: 180, 171, 170, 190, 183, 159, 178, 185 (n=8)

$\overline{x} = \frac{1}{8}(180 + \ldots + 185) = 177$

$s^2 = \frac{1}{7}(3^2 + \ldots + 8^2) = 98.3, \qquad s = 9.91$

$$\left|\frac{\overline{x} - \xi_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{177 - 180}{\frac{9.91}{\sqrt{8}}}\right| = 0.86$$

$\gamma^{(7)}_{95\%} = 2.37$, ⇒ ***Annahme*** *von* H_0.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{7 \cdot 98.3}{100} = 6.98$$

$\chi^{2\ (7)}_{L,\ 95\%} = 1.69$, $\chi^{2\ (7)}_{R,\ 95\%} = 16.01$ ⇒ ***Annahme*** *von* $\tilde{H}_0$.

Einseitiger Test: $\tilde{H}_0: \sigma \leq 10$ *gegen* $\sigma > 10$

$\chi^{2(7)}_{95\%,\text{ einseitig links}} = 14.07$ ⇒ ***Annahme*** *von* $\tilde{H}_0$.

12.3 Vergleich der Mittelwerte zweier verschiedener Grundgesamtheiten

Sei

X (ξ, σ)-normalverteilt, Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

Y (η, σ)-normalverteilt, Stichprobe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$; $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i$

$\Rightarrow$

$\overline{X} \sim \left(\xi, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$-normalverteilt, $\frac{(n-1)S^2 x}{\sigma^2} \sim \chi^{2(n-1)}$

$\overline{Y} \sim \left(\eta, \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right)$-normalverteilt, $\frac{(m-1)S^2 y}{\sigma^2} \sim \chi^{2(m-1)}$

Annahme: X,Y sind voneinander unabhängig.

$\Rightarrow$

$\overline{X} - \overline{Y} \sim \left(\xi - \eta, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}\right) = \left(\xi - \eta, \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$-normalverteilt. Dann gilt

Satz 12.3 *Die Zufallsgröße*

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\xi - \eta)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2\right)}} \tag{12.7}$$

ist Student-normalverteilt mit n+m-2 Freiheitsgraden.

Test auf Gleichheit von zwei normalverteilten Grundgesamtheiten mit derselben unbekannten Streuung σ	
Vorgegeben	Hypothese $H_0:\ \xi = \eta$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_n \ \Rightarrow\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \ \Rightarrow\ \overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_n \ \Rightarrow\ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ $y_1, y_2, \ldots, y_n \ \Rightarrow\ \overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i$
Berechne[§]	t $= \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - \overline{y})^2\right)}}$
Entscheidung	$\lvert t\rvert > \gamma_{P\%}^{(n-m+2)} \Rightarrow$ **Ablehnung** von H_0 $\lvert t\rvert < \gamma_{P\%}^{(n-m+2)} \Rightarrow$ **Annahme** von H_0

Wie bei allen anderen Tests sind auch hier einseitige Tests möglich.

[§] Soll anstatt H_0 die Hypothese $\tilde{H}_0$: $\xi - \eta = c$ (konstant) getestet werden, ersetzt man in der Testgröße t den Zähler durch $\overline{x} - \overline{y} - c$

Beispiel 12.10 *Die Hypothese H_0: Die Männer sind 15cm größer als die Frauen soll bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90% getestet werden.*

X (Frauen) Stichprobe: 168,175,170

Y (Männer) Stichprobe: 180,183,179,195,175,180,178

$\overline{x} = 171,\ \overline{y} = 181.43$

$$\begin{aligned} t &= \frac{171 - 181.43 + 15}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}\sqrt{\frac{1}{3+7-2}\left(3^2+4^2+1^2\right)+\left(1.43^2+1.57^2+\ldots+3.43^2\right)}} \\ &= \frac{4.57}{0.69\sqrt{\frac{1}{8}\left(26+249.7\right)}} \\ &= 1.13 \end{aligned}$$

$\gamma^{(8)}_{90\%} = 1.83 \Rightarrow H_0$ *wird angenommen.*

Hätte man stattdessen die Hypothese $\tilde{H}_0$: „Der Größenunterschied zwischen Männern und Frauen ist größer als 15cm“ getestet, gegen die Alternative „Unterschied ist kleiner“ hätte man gehabt (bei 90%):

$t = 1.13$ *wie oben*

$\gamma^{(8)}_{90\%,\ \mathrm{einseitig\ links}} = 1.40 \Rightarrow \tilde{H}_0$ *wird angenommen.*

12.4 Die Fisher-Verteilung

Abbildung 12.10: Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962)

Definition 12.3 *Die Funktion*

$$f_{m,n}(x) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{m}{2}x+\frac{n}{2}\right)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}}};\ 0 \le x < \infty \qquad (12.8)$$

ist die Dichtefunktion der F-Verteilung (Fisher-Verteilung) *mit (m,n) Freiheitsgraden. Stets gilt $\int_0^\infty f_{m,n}(x)dx = 1$. Die Funktion*

$$F_{m,n}(z) = \int_0^z f_{m,n}(x)dx$$

heißt Verteilungsfunktion *der F-Verteilung mit (m,n) Freiheitsgraden. $F_{m,n}(z)$ ist tabelliert.*

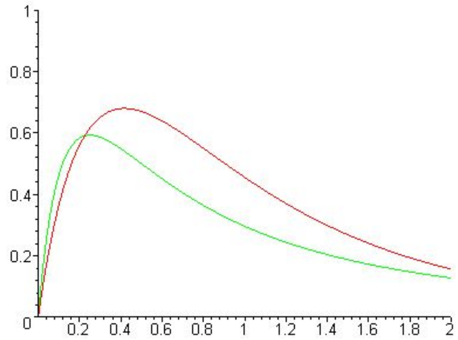

Abbildung 12.11: $f_{4,10},\ f_{4,2}$

Satz 12.4 *Sei*

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ *Stichprobe aus einer* (ξ, σ_1) *normalverteilten Grundgesamtheit,*

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *Stichprobe aus einer* (η, σ_2) *normalverteilten Grundgesamtheit,*

$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$; $S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$,

$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$; $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$.

Dann gilt: Die Größe

$$\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \tag{12.9}$$

ist F-verteilt mit (m-1,n-1) Freiheitsgraden.

Bezeichnung:

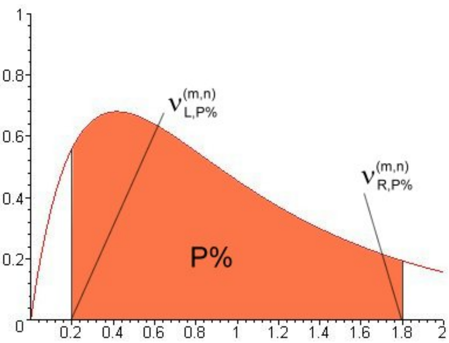

Abbildung 12.12: F-verteilt mit (m,n) Freiheitsgraden

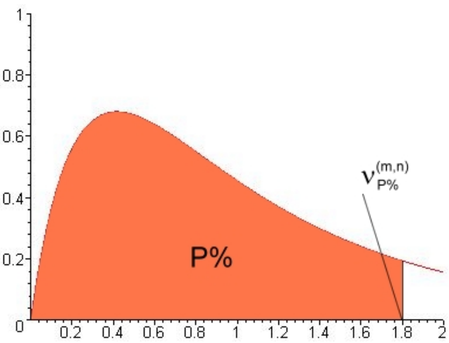

Abbildung 12.13: F-verteilt mit (m,n) Freiheitsgraden

Bemerkung 12.4 *Stets gilt*

$$\nu_{P\%}^{(m,n)} = \frac{1}{\nu_{100-P\%}^{(n,m)}}$$

Beispiel 12.11

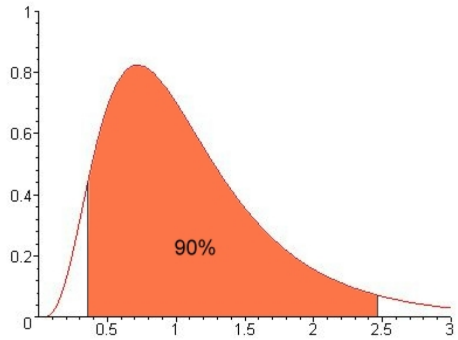

Abbildung 12.14: *F-verteilt mit (10,18) Freiheitsgraden*

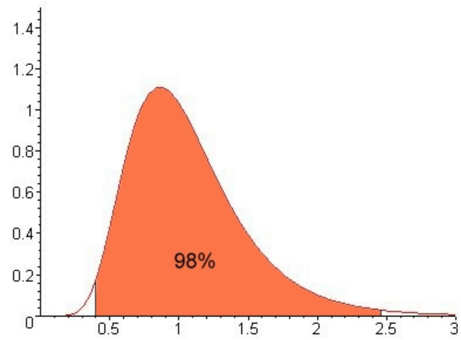

Abbildung 12.15: *F-verteilt mit (25,30) Freiheitsgraden*

$\nu_{L,\ 90\%}^{(10,18)} = 0.36,\ \nu_{R,\ 90\%}^{(10,18)} = 2.49$

Nebenrechnung: $\nu_{5\%}^{(10,18)} = \frac{1}{\nu_{95\%}^{(18,10)}} \approx \frac{1}{2.80} \approx 0.36$

$\nu_{L,\ 98\%}^{(25,30)} = 0.4,\ \nu_{R,\ 98\%}^{(25,30)} = 2.47$

Nebenrechnung: $\nu_{1\%}^{(25,30)} = \frac{1}{\nu_{99\%}^{(30,25)}} \approx \frac{1}{2.54} \approx 0.4$

Test der Hypothese H_0: $\sigma_1^2 = c^2\sigma_2^2$ gegen die Alternative $\sigma_1^2 \neq c^2\sigma_2^2$	
Vorgegeben	Hypothese $H_0:\ \sigma_1^2 = c^2\sigma_2^2$, Sicherheitswahrscheinlichkeit P%
Stichprobe	$X_1, X_2, \ldots, X_m \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$ $\Rightarrow S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \Rightarrow \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ $\Rightarrow S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$
Realisationen	$x_1, x_2, \ldots, x_m \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i$ $\Rightarrow s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x})^2$ $y_1, y_2, \ldots, y_n \Rightarrow \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$ $\Rightarrow s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2$
Berechne	$\frac{s_1^2}{c^2 s_2^2} = s$
Entscheidung	$\nu_{L,\ P\%}^{(m-1,n-1)} \leq s \leq \nu_{R,\ P\%}^{(m-1,n-1)} \Rightarrow$ **Annahme** von H_0
	$s < \nu_{L,\ P\%}^{(m-1,n-1)}$ oder $s > \nu_{L,\ P\%}^{(m-1,n-1)} \Rightarrow$ **Ablehnung** von H_0

Beispiel 12.12 *Bei der Beobachtung einer Tierart wird vermutet, dass die Lebenserwartung bei den Weibchen wesentlich stärker schwankt als bei den Männchen.*

Eine Messreihe ergab

Weibchen:	*10, 12, 13, 12, 9, 17, 16, 14, 10, 15*	(X_i) ξ, σ_1
Männchen:	*17, 18, 19, 17, 18, 17*	(Y_i) η, σ_2

Man teste die Hypothese H_0: Die Standardabweichung bei den Weibchen is doppelt so groß wie die der Männchen bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90%.

$H_0 :: \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right)^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow \sigma_1^2 = 4\sigma_2^2$

$\overline{x} = 12.8;\ s_1^2 = \frac{1}{9}\left(2.8^2 + \ldots + 2.2^2\right) \approx 7.24$

$\overline{y} = 17.7;\ s_2^2 = \frac{1}{5}\left(1^2 + \ldots + 1^2\right) \approx 0.67$

$\frac{7.24}{4 \cdot 0.67} = 2.7$

$\nu_{L,\ 90\%}^{(9,5)} = 0.16,\ \nu_{R,\ 90\%}^{(9,5)} = 4.77$

NR: $\nu_{5\%}^{(9,5)} = \frac{1}{\nu_{95\%}^{(5,9)}} = \frac{1}{3.48} \approx 0.29$

$\Rightarrow H_0$ *wird angenommen.*

Beispiel 12.13 *Es wird vermutet, dass die Studierenden, die regelmäßig in der Mensa essen, häufiger krank sind, als diejenigen, die nicht in der Mensa essen.*

X: Mensa-Esser:	*Zahl der Fiebertage im vergangenen Jahr*
Y: Nicht-Mensa-Esser:	*Zahl der Fiebertage im vergangenen Jahr*

Annahme: alles normalverteilt.

X: 18, 12, 13, 4, 17	$m = 5$ *aus* (ξ, σ_x)*-normalverteilter Grundgesamtheit*
Y: 13, 8, 17, 19, 21, 1	$n = 6$ *aus* (η, σ_y)*-normalverteilter Grundgesamtheit*

$\overline{x} = 12.8;\ s_x^2 = 5.54$

$\overline{y} = 13.16;\ s_y^2 = 7.54$

Zunächst: Test auf Gleichhheit der Varianzen (Sicherheitswahrscheinlichkeit: 90%)

$H_0 :\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \qquad s = \frac{s_x^2}{s_y^2} = 0.734$

$\nu_{L,\ 90\%}^{(4,5)} = 0.16,\ \nu_{R,\ 90\%}^{(4,5)} = 5.19$

NR: $\nu_{5\%}^{(4,5)} = \frac{1}{\nu_{95\%}^{(5,4)}} \approx 0.16$

$\Rightarrow H_0$ *wird angenommen.*

$H_0 :\ \xi \overset{(\leq)}{=} \eta$ *gegen* $\xi > \eta$ *bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%.*

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \overline{y})^2 \right)}} = \frac{12.8 - 13.16}{\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} \sqrt{\frac{1}{9} (22.16 + 37.7)}} \approx -0.23$$

$\Rightarrow H_0$ wird angenommen.

Beispiel 12.14 *Ein Würfel wird auf Korrektheit bei den Sechser-Würfen getestet.*

Dazu wird 100mal geworfen $\Rightarrow X \sim B(100, p)$, $X =$ Anzahl der geworfenen Sechsen.

Test der Hypothese $H_0 : p = \frac{1}{6}$ gegen die Alternative $p \neq \frac{1}{6}$ mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%.

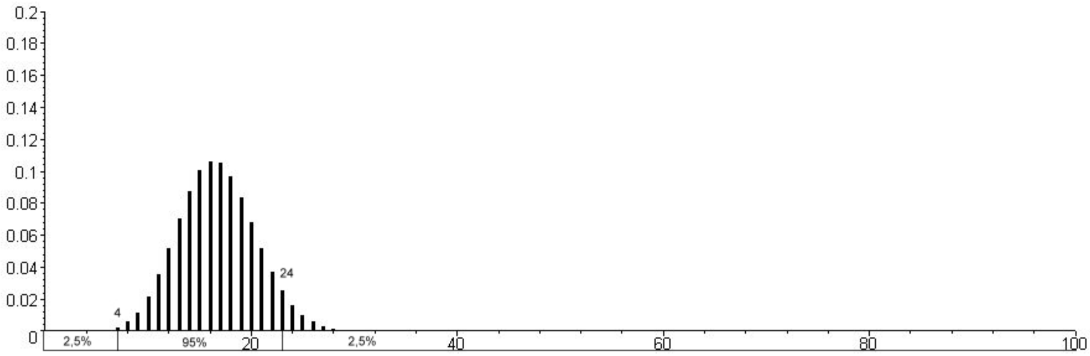

Abbildung 12.16: Binomialverteilung

Andere Möglichkeit: Zentraler Grenzwertsatz

$X_i = 0$ *mit einer Wahrscheinlichkeit von* $\frac{5}{6}$

$X_i = 1$ *mit einer Wahrscheinlichkeit von* $\frac{1}{6}$

$\mu = \frac{1}{6}$

$\sigma^2 = \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{36}$

$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$= N\left(\frac{1}{6}, \frac{\frac{\sqrt{5}}{6}}{\sqrt{100}}\right)$

$= N(0.16, 0.037)$

$\frac{\overline{X}-0.16}{0.037} \sim N(0,1)$

$$\begin{array}{lllll} -1.96 & \leq & \frac{\overline{x}-0.16}{0.037} & \leq & 1.96 & \textit{mit 95\%iger Wahrscheinlichkeit} & \Leftrightarrow \\ 0.087 & \leq & \overline{x} & \leq & 0.26 & \textit{mit 95\%iger Wahrscheinlichkeit} & \Leftrightarrow \\ 8.7 & \leq & \textit{Trefferzahl} & \leq & 26 & \textit{mit 95\%iger Wahrscheinlichkeit} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ *annehmen, falls* $9 \leq$ *Trefferzahl* ≤ 26, *sonst ablehnen.*

Andere Möglichkeit: Laplace-Näherung

$X \sim B\left(100, \frac{1}{6}\right)$, $\mu = \frac{100}{6} = 16.67$, $\sigma^2 = 100 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 13.89$, $\sigma = 3.73$

$P\left(k_1 \leq x \leq k_2\right) = \Phi\left(\frac{k_2-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-\mu-0.5}{\sigma}\right)$

$\Phi\left(\frac{k_2-\mu+0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k_2-16.17}{3.73}\right) \stackrel{!}{=} 0.975 \Rightarrow \frac{k_2-16.17}{3.73} = 1.96 \Rightarrow k_2 = 23.48$

$\Phi\left(\frac{k_1-\mu-0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k_1-1z.17}{3.73}\right) \stackrel{!}{=} 0.025 \Rightarrow \frac{k_1-17.17}{3.73} = -1.96 \Rightarrow k_1 = 9.85$

$\Rightarrow$ *annehmen, falls* $9 \leq$ *Trefferzahl* ≤ 23, *sonst ablehnen.*

Beispiel 12.15 *Beim Roulettspiel soll die Korrektheit der Zahl „0“ getestet werden.*

Stichprobe: 1000 Mal drehen.

Wie lautet die Entscheidungsregel, mit der man die Hypothese H_0: $p = \frac{1}{37}$ *mit 99%iger Sicherheitswahrscheinlichkeit ablehnt?*

$X_i = 0$ *falls „nicht 0“*, $X_i = 1$ *falls „0“*

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$; $X \sim B\left(1000, \frac{1}{37}\right)$; $EX = \frac{1000}{37} \approx 27.03$; $Var\ X = 1000 \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \approx 26.29$; $\sigma(X) = 5.13$

$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-27.03}{5.13}\right) \Rightarrow \frac{X-27.03}{5.13} \sim N(0,1) \Rightarrow -2.58 \leq \frac{X-27.03}{5.13} \leq 2.58$ *mit 99%iger Wahrscheinlichkeit* $\Rightarrow 13.79 \leq X \leq 40.27$ *mit 99%iger Wahrscheinlichkeit*

Entscheidungsregel: bei höchstens 12 oder mindestens 41 Treffern wird die Hypothese H_0 *abgelehnt.*

Beispiel 12.16 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Gästen, die n Geschenke mitbrachten, jemand zufällig sein eigenes zurückerhält?*

$$\begin{array}{lll} n=2 & (1,2),(2,1) & p = \frac{1}{2} = 0.5 \\ n=3 & (1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1) & p = \frac{4}{6} = 0.66 \\ n=4 & \textit{?} & \end{array}$$

allgemein: n Gäste; $p = \frac{z}{n!}$ *(z: Anzahl der Permutationen, bei denen mindestens eine Stelle stimmt)*

Nebenrechnung:

$z = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \binom{n}{4}(n-4)! \pm \ldots$

$= n(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! - \frac{n!}{4!(n-4)!}(n-4)! \pm \ldots$

$= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} \pm \ldots$

Nebenrechnung:

$\frac{n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} \pm \ldots}{n!}$

$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \pm \ldots \pm \frac{1}{n!} \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{e} = 1.63212\ldots$¶

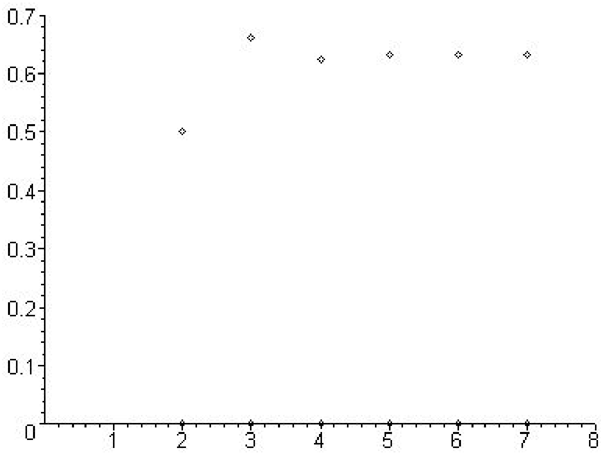

Abbildung 12.17: Verlauf

Beispiel 12.17 *Ein Puzzle besteht aus 5555 Teilen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten zwei Teile, die man herausgreift, zusammenpassen?*

$5555 = 5 \cdot 11 \cdot 101 \Rightarrow$ *Puzzle: 101x55*

Ecken:	4
Randstücke:	$99 \cdot 2 + 53 \cdot 2 = 304$
innere Stücke:	$5555 - 308 = 5247$

alle Möglichkeiten: $5555 \cdot 5554$

günstig: $4 \cdot 2 + 304 \cdot 3 + 5247 \cdot 4 = 21908$

$P = \frac{21908}{5555 \cdot 5554} = 0.0007100 \approx \frac{1}{1408}$

¶ $\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \mp \ldots \Rightarrow -\frac{1}{e} = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \pm \ldots$

Anhang A

Monte Carlo Methoden

A.1 Schätzer für π

Es werden zufällig Reiskörner in folgenden Aufbau geworfen:

$$\left.\begin{array}{l} F_Q = a^2 \\ F_K = \frac{a^2}{4}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F_K}{F_Q} = \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{F_K}{F_Q}$$

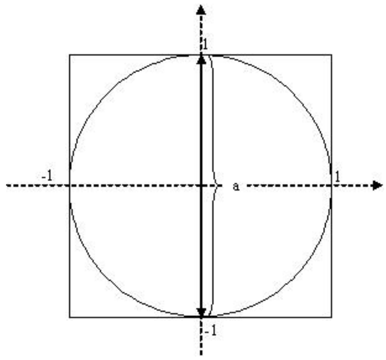

Abbildung A.1: Versuchsaufbau

Ein Schätzer für π ist:

4· „Anzahl der Treffer im Kreis"/„Anzahl aller Versuche".

Ein praktischer Versuch könnte so aussehen:

Mit einem Zufallsgenerator werden 2 Zahlen x,y „gewürfelt": $-1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ (a = 2)$.
Prüfe mit Phytagoras: $x^2 + y^2 \leq 1$. Zähle Treffer im Kreis.

A.2 Buffons Problem

Auf eine Fläche mit parallelen Linien (Abstand d) werden Nadeln der Länge L geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel die Linie schneidet?

$\frac{y}{\frac{L}{2}} = \sin\alpha \Rightarrow y = \frac{L}{2}\sin\alpha$

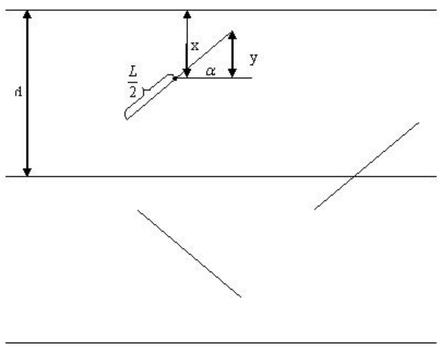

Abbildung A.2: Skizze

Praktischer Versuch:

Erzeuge Zufallszahlen: $0 \leq x \leq \frac{d}{2},\ 0 \leq \alpha \leq \pi$ alle gleich wahrscheinlich. Dann ist

Nadel schneidet Linie $\Leftrightarrow x \leq y = \frac{L}{2}\sin\alpha$.

P(„Treffer“) =

„Fläche unterhalb $\frac{L}{2} \cdot \sin\alpha$“ / „Fläche gesamt“

$= \frac{\int_0^\pi \frac{L}{2}\sin\alpha d\alpha}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{L}{\pi d}\left(-\cos\alpha|_0^\pi\right) = \frac{2L}{\pi d}$

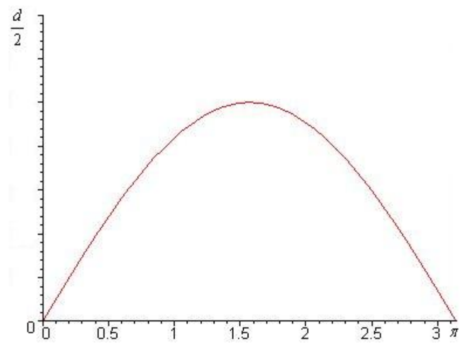

Abbildung A.3: Die Funktion $\frac{L}{2} \cdot \sin\alpha$ für $L < d$

Im Spezialfall $L = d$ hat man P(„Treffer“) $= \frac{2}{\pi}$.

Praktischer Versuch:

Werfen einer Nadel und Zählen der relativen Häufigkeit h der Treffer. Dann gilt $\pi \approx \frac{2}{h}$.

Anhang B

Aufgaben

Aufgabe 1 *Ein Würfel wird zweimal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:*

A: „zwei gleiche Augenzahlen“

B: „zwei verschiedene Augenzahlen“

C: „genau ein Wurf ergibt Augenzahl 2“

D: „wenigstens ein Wurf ergibt Augenzahl 2“

E: „erster oder zweiter Wurf ergibt Augenzahl 6“

F: „Augensumme ist gerade oder durch 3 teilbar“

G: „Augensumme ist gerade unddurch 3 teilbar“

Aufgabe 2 *Eine Münze wird viermal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:*

A: „mindesten einmal K“

B: „genau einmal K“

C: „beim zweiten oder dritten Wurf K“

D: „nicht mehr als einmal K“

E: „jedes Symbol K und Z wenigstens zweimal“

Aufgabe 3 *Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte ein As, ein König oder Herz ist?*

Aufgabe 4 *Aus der Menge der ersten 100 natürlichen Zahlen wir zufällig eine Zahl ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl durch 4 oder durch 6 teilbar ist?*

Aufgabe 5 *Früher war ein Spiel mit drei Würfeln unter dem Spiel „Knöchelspiel“ bekannt, bei dem es darauf ankam, beim Werfen der drei Würfel mehr als 10 Augen zu werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?*

Aufgabe 6 *Beim Schafkopf werden 32 Karten auf 4 Spieler gleichmäßig verteilt. Wie viele verschiedene Spiele kann ein Spieler erhalten?*

Aufgabe 7 *Bei einer Gesellschaft treffen sich m Personen. Jede drückt der anderen die Hand. Wie viele Händedrücke gibt es?*

Aufgabe 8 *Aus 6 Personen, die bei einer Wahl gleiche Stimmenzahl erhielten, werden 4 durch Los in den Vorstand gewählt. Wie groß ist die Chance jedes einzelnen?*

Aufgabe 9 *Auf einer Speisekarte stehen 3 Vorspeisen, 4 Hauptspeisen und 6 Nachspeisen. Wieviele verschiedene Menüs mit Vor-, Haupt- und Nachspeise gibt es?*

Aufgabe 10 *Gegeben sind die Ziffern 1,2,3,4,5,6.*

(i) *Wieviele 6stellige Zahlen lassen sich bilden, wenn jede Ziffer einer Zahl nur einmal auftreten soll?*

(ii) *Wieviele 3stellige Zahlen lassen sich auf dieselbe Art bilden?*

(iii) *Sämtliche 6stellige Zahlen aus (i) seien aufsteigend der Größe nach geordnet. An welcher Stelle steht die kleinste Zahl, die mit 4 beginnt?*

Aufgabe 11 *Man beweise:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad ; k, n \in \mathbf{N}_0$$

Aufgabe 12 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Schafkopf weder einen Unter noch einen Ober zu bekommen?*

Aufgabe 13 *Wieviele 6stellige Zahlen gibt es, die die Eins einmal, die Zwei zweimal und die Drei dreimal enthalten?*

Aufgabe 14 *Ein Kartenspiel bestehe aus 32 Karten. Jeder der 4 Spieler erhält 8 Karten. Man berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:*

A: Jeder Spieler bekommt ein As

B: Ein bestimmter Spieler bekommt lauter Herz

C: Ein beliebiger Spieler bekommt lauter Herz

Aufgabe 15 *Von 5 Personen merke sich jede eine der Ziffern 0,1,2,...,9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens zwei Personen dieselbe Zahl merken?*

Aufgabe 16 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto „6 aus 49“*

A: nur gerade Zahlen

B: nur ungerade Zahlen

gezogen werden?

Aufgabe 17 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Zahlenlotto „6 aus 49“ bei zwei aufeinanderfolgenden Ziehungen*

A: alle 6 Zahlen wiederholen?

B: genau 4 Zahlen wiederholen?

C: keine der Zahlen wiederholt?

Aufgabe 18 *Ein Laplace-Würfel wird 4 Mal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:*

A: 3 Mal eine Eins, 1 Mal eine Zwei

B: genau 3 Mal eine Eins

C: genau 3 Mal gleiche Augenzahl

D: beim 1. Wurf eine Eins, beim 2. und 3. Wurf eine Zwei und beim 4. Wurf eine Drei

E: es erscheint genau 1 Mal eine Eins, 2 Mal eine Zwei und 1 Mal eine Drei

F: Augensumme ≤ 22

G: alle 4 Augenzahlen verschieden

H: mindesten 2 Augenzahlen gleich

Aufgabe 19 *Eine Urne enthält 11 Kugeln, von denen 4 schwarz und 7 weiß sind. Der Urne werden 5 Kugeln entnommen*

(i) auf einmal

(ii) nacheinander mit Zurücklegen

. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 schwarze und 3 weiße Kugeln zu ziehen?

Aufgabe 20 *Ein Würfel wird 5 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Mal eine Sechs zu werfen?*

Aufgabe 21 *Eine Urne enthält 16 Kugeln, von denen 6 schwarz und 10 weiß sind. Der Urne werden nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit unter Verwendung eines Ereignisbaumes:*

A: Alle 3 Kugeln sind weiß.

B: 2 Kugeln sind weiß, 1 schwarz.

C: 1 Kugel ist weiß, 2 schwarz.

D: Alle Kugeln sind schwarz.

Aufgabe 22 *Bei einer Untersuchung bezeichne D: Patient ist an Diabetis erkrankt, M: Patient ist männlich,* $W=\overline{M}$*: Patient ist weiblich.*
Das Untersuchungsergebnis war (in Anteilen):

	M	W
D	0.04	0.01
$\overline{D}$	0.56	0.39

Man berechne

A: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient an Diabetis erkrankt ist.

B: die Wahrscheinlichkeit, für Diabetis unter männlichen Patienten.

C: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient männlich ist, wenn Diabetis vorliegt.

Aufgabe 23 *Bei der Übertragung der Zeichen „Punkt“ und „Strich“ in einem Fernmeldesystem werden störungsbedingt im Mittel 5% der gesendeten Punkte als Striche und 3% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen ist 3:5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Zeichen korrekt empfangen wurden, wenn*

(i) Punkt

(ii) Strich

empfangen wurde?

Aufgabe 24 *Eine Urne I enthält 4 weiße und 2 schwarze Kugeln, eine Urne II enthält 1 weiße und 5 schwarze Kugeln. Zuerst wird eine Urne ausgewählt, und dann aus der Urne eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass*

(i) eine weiße Kugel aus Urne I stammt?

(ii) eine weiße Kugel aus Urne II stammt?

(iii) eine schwarze Kugel aus Urne I stammt?

(iv) eine schwarze Kugel aus Urne II stammt?

Aufgabe 25 *In einer Urne befinden sich 12 Kugeln mit den Nummern 1,2,3,...,12. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Als Ergebnisraum verwende man* $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. *Sind die Ereignisse* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *und* $B = \{1, 4, 7, 10\}$ *unabhängig?*

Aufgabe 26 *Sei* $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ *und* $P(\{i\}) = \frac{1}{30}$ *für alle* $i = 1, 2, 3, \dots, 30$. *Man zeige, dass die Ereignisse*

T_2: *„i ist durch 2 teilbar"*
T_3: *„i ist durch 3 teilbar"*
T_5: *„i ist durch 5 teilbar"*

unabhängig sind.

Aufgabe 27 *In einer Massenproduktion werden Schrauben hergestellt. Eine Schraube wird zufällig herausgegriffen. Erfahrungsgemäß ist die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Schraube 0.1 und für eine fehlerhafte Mutter 0.05. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Schraubenkopf und Schraubenmutter zusammenpassen, wenn sie unabhängig hergestellt werden?*

Aufgabe 28 *Eine Münze wird solange geworfen, bis eine der Seiten zum zweiten Mal erscheint. Man gebe einen geeigneten Ereignisbaum an. X sei dieAnzahl der Würfe. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichne ein Diagramm für die Verteilung.*

Aufgabe 29 *Drei Kugeln werden zufällig auf 3 Kästen verteilt. X sei die Anzahl der leeren Kästen, Y die Anzahl der Kugeln im ersten Kasten. Sind X und Y unabhängig?*

Aufgabe 30 *Eine Urne enthält 10 Kugeln mit den Nummern 1,2,3,...,10. Eine Kugel wird zufällig gezogen. X sei die darauf verzeichnete Zahl. Man berechne EX. Nun werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Y bezeichne das Maximum der Zahlen. Man berechne EY.*

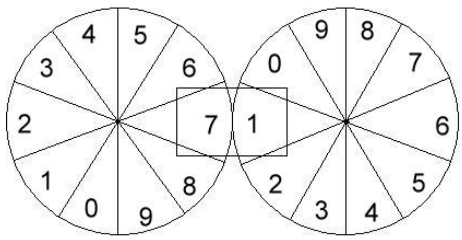

Abbildung B.1: Spielautomat

Aufgabe 31 *Ein Spielautomat mit zwei Scheiben, deren 10 kongruente Kreisausschnitte mit den Nummern 0 bis 9 nach dem Drehen zufällig stehenbleiben, schüttet folgende Gewinne aus:*

5 €, fall 2 Mal die 0 im Fenster steht.
2 €, wenn irgendein anderes Paar gleicher Zahlen auftritt.
0.50 €, falls einmal die 0 auftritt.

In allen anderen Fällen geht der Einsatz verloren.

(i) Man berechne den Erwartungswert der Ausschüttung

(ii) Ist der Einsatz von 0.50 € für den Automatenbetreiber rentabel?

Aufgabe 32 *Bei einem Glücksspiel werden zwei Würfel geworfen. Als Gewinn erhält man soviel €, wie das Produkt der beiden erzielten Augenzahlen ergibt. Wie groß muss der Einsatz sein, dass das Spiel fair ist?*

Aufgabe 33 *Eine Münze wir solange geworfen, bis zum ersten Mal K erscheint. Wie oft muss man durchschnittlich werfen?*

Aufgabe 34 *Eine Zufallsgröße X nimmt die Werte $\pm a$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an. Man berechne $Var\ X$.*

Aufgabe 35 *Bei einem Lotteriespiel kostet das Los 1 €. Es werden 1000 Lose verkauft, darunter 899 Nieten. Bei 50 Losen erhält man 5 €, bei weiteren 50 Losen je 1 € und bei einem Los 200 €.*

(i) *Man berechne den Erwartungswert der Ausschüttung pro Los.*

(ii) *Welchen durchschnittlichen Gewinn kann der Lotteriebetreiber pro Los erwarten?*

(iii) *Man berechne die Varianz der Ausschüttung.*

Aufgabe 36 *Aus den Zahlen 1,2,3,...,n wird zufällig eine Zahl ausgewählt. X bezeichne die ausgewählte Zahl. Man berechne*

(i) EX

(ii) $Var\ X$

Aufgabe 37 *Eine Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = 5$ und die Varianz $\sigma^2 = 4$. Man gebe eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(|X-5| < 3)$ an. Man schätze mittels der Ungleichung von Tschebyschew ab, wie groß c mindestens sein muss, dass $P(|X-5| < c) \geq 0.9$ gilt.*

Aufgabe 38 *Sei X die Augenzahl beim Werfen eines Würfels. Man berechne $P(|X-\mu| \leq 2.5)$ (μ: Erwartungswert von X). Welche Abschätzung liefert die Tschebyschew-Ungleichung für $P(|X-\mu| \leq 2.5)$?*

Aufgabe 39 *Bei der automatischen Herstellung von Stahlbolzen wird ein Durchmesser von 4.5 mm verlangt, wobei Abweichungen von 0.2 mm zulässig sind. Eine Überprüfung ergab für den Erwartungswert 4.5 mm und für die Standardabweichung $\sigma = 0.08$ mm. Mit welchem Ausschussanteil muss höchstens gerechnet werden?*

Aufgabe 40 *Die Lebensdauer X bestimmter Lampen schwank mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ um den Erwartungswert $\mu = 150$ (Angaben in Stunden). Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit ergibt eine Zufallsauswahl von 4 Lampen eine mittlere Lebensdauer zwischen 130 und 170 Stunden? Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit kann bei 16 Lampen mit einer Gesamtlebensdauer zwischen 2240 und 2560 Stunden gerechnet werden?*

Aufgabe 41 *Für die Brenndauer X einer Glühlampenserie kann die Standardabweichung $\sigma < 100$ angenommen werden (in Stunden). Wie viele Lampen müssen mindestens getestet werden, damit der arithmetische Mittelwert der Brenndauer mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigsten 95% um weniger als 50 Stunden vom Erwartungswert abweicht?*

Aufgabe 42 *In einem wöchentlich durchgeführten Lottospiel werden je 1000 Lose verkauft mit 950 Nieten. Bei 40 Losen erhält man je 3 €, bei 9 Losen je 6 € und bei einem Los 201 €. Sei X die Bankauszahlung pro Los. Man berechne EX und $Var\ X$. Nach wieviel Spielen unterscheidet sich das arithmetische Mittel der wöchentlichen Bankauszahlunge pro Los mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% um höchsten 0.50 € vom Erwartungswert der Auszahlung?*

Aufgabe 43 *Ein gezinkter Würfel besitzt folgende Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahl X:*

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.3

Man berechne EX und $Var\ X$.

Aufgabe 44 *Ein regelmäßiges Tetraeder trägt auf seinen vier Seiten die Zahlen 1,2,3,4. Nach einem Wurf gilt diejenige Zahl auf der unten liegenden Fläche als geworfen. Das Tetraeder wird dreimal geworfen.*

(i) *Man gebe einen geeigneten Ereignisraum an.*

(ii) *Man berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:*

A: Die Augenzahl ist jedesmal 1.

B: Die Augenzahl 1 kommt genau zweimal vor.

C: Mindestens zwei Augenzahlen sind gleich.

D: Jede der Augenzahlen 1,2,3 erschein genau einmal.

(iii) *Wie oft muss das Tetraeder geworfen werden, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90% wenigstens einmal die Augenzahl 4 zu erhalten?*

Aufgabe 45 *Ein Würfel wird sechsmal geworfen. Man berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:*

A: genau 1 Sechser

B: mindestens 1 Sechser

C: höchstens 1 Sechser

Aufgabe 46 *Ein serienmäßig hergestelltes Gerät besteht aus n=5 Teilen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil nicht funktioniert, sei für alle Teile gleich p=0.03. Die Fehlerhaftigkeit der Teile sei unabhängig voneinander. Das Gerät ist funktionsuntüchtig, wenn mindestens ein Teil defekt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät nicht funktioniert? Was ergibt sich für n=10000 und p=0.0003 (Erklärungsversuch für das Versagen großer technischer Anlagen)*

Aufgabe 47 *Was ist wahrscheinlicher bei einem Massenartikel mit 5% Ausschussanteil:*

(A) *Kein defektes unter 10 Stücken?*

(B) *Höchstens ein defektes unter 20 Stücken?*

Aufgabe 48 *Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Glücksspiel zu gewinnen, sei 10%. Wie viele Spiele müssen gespielt werden, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90% wenigstens eine Partie zu gewinnen?*

Aufgabe 49 *Ein Würfel wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Augenzahl 6 erscheint, höchstens aber sechsmal.*
Man zeichne den Ereignisbaum des Experiments.
Man berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

A: Genau beim 6. Wurf ein Sechser.

B: Keinmal 6.

C: Frühestens beim 5. Wurf ein Sechser.

Aufgabe 50 *Wieviele Spieler müssen sich beim Pferdelotto „4 aus 18“ beteiligen, dass bei einer Mindeswahrscheinlichkeit von 99% wenigstens ein Haupttreffer erzielt wird?*
(Haupttreffer: Vier Richtige beim zufälligen Ankreuzen von vier Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 18\}$*)*
Wieviele Spieler müssen sich beteiligen, dass bei gleicher Mindestwahrscheinlichkeit wenigstens ein „Dreier“ (3 Richtige) erzielt wird?

Aufgabe 51 *Eine Fabrik gibt den Ausschussanteil bei der Produktion elektrischer Sicherungen mit 1% an. Der Käufer einer Großlieferung entnimmt eine Stichprobe von 100 Stück und entscheidet nach folgendem Plan: Sind unter den 100 Prüfstücken mehr als zwei defekt wird die Lieferung zurückgewiesen. Sonst wird sie angenommen.*

(i) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung zurückgewiesen wird, obwohl der Ausschussanteil der Angabe entspricht?*

(ii) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferungangenommen wird, obwohl der Ausschussanteil in Wirklichkeit 5% ist?*

Aufgabe 52 *Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt werde mit* $p = \frac{1}{2}$ *angenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie mit 6 Kindern*

(i) *lauter Mädchen*

(ii) *höchstens 3 Mädchen*

(iii) *mindestens 1 Mädchen*

hat?

Aufgabe 53 *In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, darunter 200 weiße. Es wird 400 Mal einer Kugel mit Zurücklegen gezogen. Man gebe eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass mindestens 40 Mal und höchsten 120 Mal eine weiße Kugel gezogen wird.*

Aufgabe 54 *Wie oft muss man mindestens Würfeln, dass die relative Häufigkeit für das Werfen einer Sechs mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% um weniger als 0.01 von* $\frac{1}{6}$ *abweicht?*

Aufgabe 55 *In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, darunter 200 weiße. Es wird 1000 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. In welchem Intervall liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln?*

Aufgabe 56 *Bei der Herstellung von Transistoren sind erfahrungsgemäß 0.5% der Stücke fehlerhaft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer 1000-Stück-Packung mehr als zwei fehlerhafte Transistoren sind (Man verwende die Poisson-Näherung)?*

Aufgabe 57 *Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 5000 StudentInnen mehr als 5 am 1. Januar Geburtstag haben (Annahme* $p = \frac{1}{365}$*).*

Aufgabe 58 *Eine Fernsprechauskunft erhält während der Hauptbetriebszeit durchschnittlich 300 Anrufe pro Stunde. Maximal 10 Auskünfte pro Minute können gegeben werden. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Minute der Hauptbetriebszeit die Stelle überlastet ist (d.h., dass mehr Anrufe eingehen, als bewältigt werden können).*

Aufgabe 59 *Eine Lotterie verkauft 10000 Lose mit 100 Gewinnen. Wie viele Lose muss man kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit für wenigstens einen Treffer größer als 50% ist?*

Aufgabe 60 *Eine Maschine produziert Massenartikel mit Ausschussanteil 1%. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einer 100-Stück-Packung höchstens 2 defekte Stücke enthalten sind, und zwar*

(i) *exakt*

(ii) *näherungsweise (Poisson)*

Aufgabe 61 *Man berechne*

$$\sum_{i=0}^{15} B\left(25, \frac{1}{2}, i\right)$$

(i) *mit dem Larson-Nomogramm*

(ii) *mittels Laplace-Näherung*

(iii) *mittels der Tabelle*

Aufgabe 62 *Mit einem Würfel wird 1200 Mal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, genau 180 Sechserwürfe zu machen*

(i) mit Hilfe der Funktion φ

(ii) mit Hilfe der Funktion Φ

Aufgabe 63 *Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine der Produktion zufällig entnommene Glühlampe defekt ist, sei* $p = 0.1$*. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Glühlampen höchstens 16 unbrauchbar sind*

(i) mit dem Larson-Nomogramm

(ii) mittels Laplace-Näherung

Aufgabe 64 *Ein Würfel wird 1200 Mal geworfen. Die Augenzahl 6 gelte als Treffer. X sei die Anzahl der Treffer. Man berechne* $P\,(180 \leq X \leq 220)$*.*

Aufgabe 65 *Eine Münze wird 4000 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Trefferzahl von „Kopf“ um nicht mehr als 30 vom Erwartungwert abweicht?*

Aufgabe 66 *Ein Würfel wird 1200 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der geworfenen Sechsen sich um höchstens 1% von* $\frac{1}{6}$ *unterscheidet?*

Aufgabe 67 *In einer Urne sind eine schwarze unf 5 weiße Kugeln. Bei wieviel Ziehungen einer Kugel mit Zurücklegen darf man mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% erwarten, dass die Zahl der gezogenen weißen Kugeln um höchsten 15 vom Erwartungswert abweicht?*

Aufgabe 68 *Wie oft muss man würfeln, damit die relative Trefferhäufigkeit der Augenzahl „Sechs“ von* $\frac{1}{6}$ *um höchsten 1% abweicht bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%*

Aufgabe 69 *Eine Münze wird 4000 Mal geworfen. Bestimmen Sie das Interval* $[\mu - c, \mu + c]$*, in dem die Anzahl der geworfenen Wappen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% liegt.*

Aufgabe 70 *Welche Versuchszahl ist erforderlich, damit die relative Trefferhäufigkeit von der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit um weniger als ein Tausendsdel abweicht bei einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99%?*

Aufgabe 71 *Bei einem Zufallsexperiment nehme die Zufallsgröße X die Werte 1 und 2 mit gleicher Wahrscheinlichkeit an. Das Experiment wird zweimal unabhängig durchgeführt. Man zeige, dass* $U = \max(X_1, X_2)$ *kein erwartungstreuer Schätzer für den Mittelwert* μ *von X ist.*

Aufgabe 72 *Die Zufallsgröße X hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung*

x	0	1
$P(X{=}x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Es wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 3$ *durchgeführt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Stichprobenmittels* $\overline{X}$*, der Stichprobenvarianz* S^2 *und der Stichprobenstandardabweichung* S*. Man berechne* $E(\overline{X})$*,* $E(S^2)$ *und* $E(S)$*.*

Aufgabe 73 *Es soll untersucht werden, ob sich im Laufe des Studiums das Gewicht der Studierenden verändert. Das Durchschnittsgewicht im 1. Semester beträgt 75 kg. 30 Studenten im 8. Semester werden gewogen. Als Messreihe ergab sich (in kg):*

72, 73, 92, 69, 83, 84, 70, 59, 64, 88, 82, 72, 71, 70, 78, 82, 82, 65, 64, 50, 69, 80, 81, 69, 76, 72, 71, 70, 69, 70

Man berechne den Mittelwert ξ *der Stichprobe. Man teste die Hypothese* $\xi = 75$ *bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%.*

Aufgrund früherer Messugen kann von einer Standardabweichung $\sigma = 8$ *ausgegangen werden.*

Aufgabe 74 *Dieselbe Aufgabe wie vorher (siehe Aufgabe 73). Jetzt allerdings unter der Annahme, dass σ unbekannt ist (Die Gewichtsverteilung der Studenten wird als normalverteilt angenommen).*

Anhang C

Lösungsvorschläge

Lösung 1 $\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6) \end{array} \right\}, |\Omega| = 36$

P(A) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

P(B) $= 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

P(C) $= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

P(D) $= \frac{11}{36}$

P(E) $= \frac{11}{36}$

Für F sind die Augensummen 2,3,4,6,8,9,10,12, für G die Summen 6,12

$$\begin{array}{rcl} 2 & : & (1,1) \\ 3 & : & (1,2),(2,1) \\ 4 & : & (1,3),(2,2),(3,1) \\ 6 & : & (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1) \\ 8 & : & (2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2) \\ 9 & : & (3,6),(4,5),(5,4),(6,3) \\ 10 & : & (4,6),(5,5),(6,4) \\ 12 & : & (6,6) \end{array}$$

P(F) $= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

P(G) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Lösung 2 $\Omega = \{KKKK, KKKZ, KKZK, KKZZ, KZKK, KZKZ, KZZK, KZZZ, ZKKK, ZKKZ, ZKZK, ZKZZ, ZZKK, ZZKZ, ZZZK, ZZZZ\}$

P(A) $= \frac{15}{16}$

P(B) $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

P(C) $= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

P(D) $= P(B) + P(\{ZZZZ\}) = \frac{5}{16}$

P(E) $= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Lösung 3 $P(\{$ *König oder As oder Herz* $\}) = \frac{19}{52}$

Lösung 4 *Sei* T_4*: „Zahl durch 4 teilbar“*

T_6*: „Zahl durch 6 teilbar“*

$T_{4,6}$: *„Zahl durch 4 oder 6 teilbar"*

$T_4 = \{4, 8, 12, \ldots, 96, 100\} \Rightarrow |T_4| = 25$

$T_6 = \{6, 12, 18, \ldots, 88, 96\} \Rightarrow |T_6| = 16$

$T_{4,6} = P(T_4 \cup T_6) = P(T_4) + P(T_6) - P(T_4 \cap T_6) =^* \frac{25}{100} + \frac{16}{100} - \frac{8}{100} = \frac{33}{100}$

Lösung 5 *Bezeichne S die Augensumme der 3 Würfel. Als Ergebnis wird gesucht:* $A = \{\omega \in \Omega : S \geq 11\}$

S	*3*	*4*	*5*	*6*	...	*10*	*11*	...	*15*	*16*	*17*	*18*
	111	*112*	*113*							*664*	*665*	*666*
		121	*131*							*646*	*656*	
		211	*122*							*655*	*566*	
			212							*565*		
			221							*556*		
			311							*466*		

Da die Tabelle symmetrisch ist, ist $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$

Lösung 6 $|\Omega| = \binom{32}{8} = 10518300$

Lösung 7 $|\Omega| = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$

Lösung 8 *Seien die Personen mit 1,2,3,4,5,6 nummeriert.*

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right\}$$

Sei A = "Person 1 wird gewählt"

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Lösung 9 $|\Omega| = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 72$

Lösung 10

(i) $|\Omega| = 6! = 720$

(ii) $|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(iii) Die Zahlen sind so geordnet: 123456, 123465, 123546, ... Sei k die kleinste Zahl. Alle vorausgegangenen Zahlen beginnen mit 1,2 oder 3 (3 Möglichkeiten) und haben beliebige restliche 5 Stellen (5! Möglichkeiten). Damit gehen der Zahl k $3 \cdot 5!$ *Zahlen voraus. Das sind 360.* $\Rightarrow$ *Die Zahl k steht an 361. Stelle.*

$^*T_4 \cap T_6 = \{12, 24, \ldots, 96\} \Rightarrow |T_4 \cap T_6| = 8$

Lösung 11

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\\ &= \frac{n!(n+1-k+k)}{(k+1)!(n+1-k-1)!}\\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\end{aligned}$$

$\square$

Lösung 12 A = *„weder Unter noch Ober"*

$\Omega = \{\{k_1,\ldots,k_8\}, k_i \in \{1,2,\ldots,32\}\}$ *(Karten durchnummeriert)* $\Rightarrow |\Omega| = \binom{32}{8}$

$A = \{\{k_1,\ldots,k_8\}, k_i \in \{1,2,\ldots,32\} \setminus \{Unter, Ober\}\} \Rightarrow |A| = \binom{24}{8}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} = \frac{24!\cdot 8!\cdot 24!}{8!\cdot 16!\cdot 32!} = \frac{(24!)^2}{16!\cdot 32!} \approx 0.07$

Lösung 13 $|\Omega| = \binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3} = \frac{6!\cdot 5!\cdot 3!}{1!\cdot 5!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 0!} = \frac{6!}{2!\cdot 3!} = 60 \Rightarrow$ *60 verschiedene Zahlen.*

Lösung 14 $\Omega = \{(\{k_1,\ldots,k_8\}, \{k_9,\ldots,k_{16}\}, \{k_{17},\ldots,k_{24}\}, \{k_{25},\ldots,k_{32}\}); k_i \in \{1,\ldots,32\}\}$

$\Rightarrow |\Omega| = \binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8} = \frac{32!\cdot 24!\cdot 16!\cdot 8!}{8!\cdot 24!\cdot 8!\cdot 16!\cdot 8!\cdot 8!\cdot 8!\cdot 0!} = \frac{32!}{(8!)^4}$

$|A| = \binom{4}{1}\binom{28}{7}\binom{3}{1}\binom{21}{7}\binom{2}{1}\binom{14}{7}\binom{1}{1}\binom{7}{7} = \frac{4!\cdot 28!\cdot 3!\cdot 21!\cdot 2!\cdot 14!\cdot 1!\cdot 7!}{1!\cdot 3!\cdot 7!\cdot 21!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 7!\cdot 14!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 7!\cdot 7!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 7!\cdot 0!} = \frac{28!\cdot 4!}{(7!)^4} \Rightarrow P(A) = \frac{28!\cdot 4!\cdot (8!)^4}{(71)^4\cdot 32!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 8^4}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29} \approx 0.11$

$|B| = \binom{8}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8} = \frac{24!\cdot 16!}{8!\cdot 16!\cdot 8!\cdot 8!} = \frac{24!}{(8!)^3} \Rightarrow P(B) = \frac{24!\cdot (8!)^4}{(8!)^3\cdot 32!} = \frac{24!\cdot 8}{32!} \approx 0.000000095$

$|C| = 4\cdot |B| \Rightarrow P(C) = 4\cdot P(B) \approx 0.00000038$

Lösung 15 $\Omega = \{(k_1,\ldots k_5); k_i \in \{0,1,\ldots,9\}\} \Rightarrow |\Omega| = 10^5$

A = *„mindestens zwei Personen gleiche Ziffer"*

$\overline{A}$ = *„alle geworfenen Ziffern verschieden"* $\Rightarrow |\overline{A}| = \frac{10!}{5!}$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{10!}{5!\cdot 10^5} \approx 0.70$

Lösung 16 $\Omega = \{(k_1, \dots k_6); k_i \in \{0, 1, \dots, 49\}\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{49}{6}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{24! \cdot 6! \cdot 43!}{6! \cdot 18! \cdot 49!} = \frac{24! \cdot 43!}{18! \cdot 49!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 19}{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44} \approx 0.0096$

$\Rightarrow P(B) = \frac{25! \cdot 6! \cdot 43!}{6! \cdot 19! \cdot 49!} = \frac{25! \cdot 43!}{19! \cdot 49!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 20}{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44} \approx 0.013$

Lösung 17 Ω *wie vorher*

$|A| = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$

$|B| = \binom{6}{4}\binom{43}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{6! \cdot 43! \cdot 43! \cdot 6!}{4! \cdot 2! \cdot 41! \cdot 2! \cdot 49!} \approx 0.00097$

$|C| = \binom{43}{6} \Rightarrow P(C) = \frac{43! \cdot 6! \cdot 43!}{6! \cdot 37! \cdot 49!} = \frac{43 \cdot 42 \cdot \ldots \cdot 38}{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44} \approx 0.44$

Lösung 18 $\Omega = \{(k_1, k_2, k_3, k_4)\,;\ k_i \in \{1, 2, \dots, 6\}\},\ \left|\Omega = 6^4 = 1296\right|$

$|A| = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{1296} = \frac{1}{324}$

$|B| = 5 \cdot 4 \Rightarrow P(B) = 5 \cdot P(A) \approx 0.015$

$|C| = 6 \cdot |B| \Rightarrow P(C) = 6 \cdot P(B) \approx 0.092$

$|D| = 1 \Rightarrow P(D) = \frac{1}{1296}$

$|E| = 4 \cdot 3 \Rightarrow P(E) = \frac{12}{1296} = \frac{1}{108}$

$\overline{F} =$ *„Augensumme größer als 22“* $= \{(6665), (6656), (6566), (5666), (6666)\} \Rightarrow$
$\left|\overline{F}\right| = 5 \Rightarrow P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \frac{5}{1296} \approx 0.996$

$|G| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow P(G) = \frac{360}{1296} \approx 0.28$

$P(H) = 1 - P(G) \approx 0.72$

Lösung 19 *N=11, S=4, n=5, s=2*

(i) $P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}}{\binom{11}{5}} = \frac{4! \cdot 7! \cdot 5! \cdot 6!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 11!} \approx 0.45$

(ii) $P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{4}{11}\right)^2\left(\frac{7}{11}\right)^3 = \frac{5! \cdot 4^2 \cdot 7^3}{2! \cdot 3! \cdot 11^5} \approx 0.34$

Lösung 20 *N=6, S=1, n=5, s=2*

$P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5! \cdot 5^3}{2! \cdot 3! \cdot 6^5} \approx 0.16$

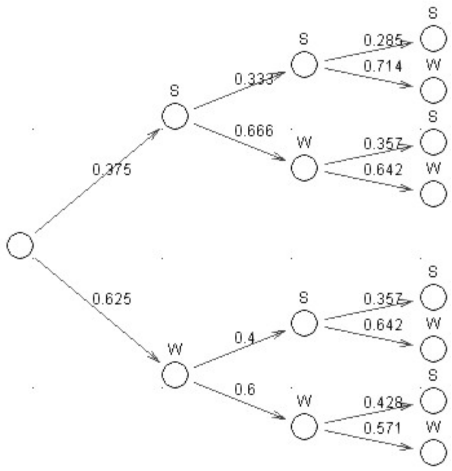

Abbildung C.1: Ereignisbaum Lösung 21

Lösung 21 $P(A_1) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} \approx 0.21$

$P(A_2) = \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 9 \cdot 10}{14 \cdot 15 \cdot 16} \approx 0.48$

$P(A_3) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 10}{14 \cdot 15 \cdot 16} \approx 0.27$

$P(A_4) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \approx 0.036$

Lösung 22

$P(A) = 0.05$

$P(B)\ \frac{P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{0.04}{0.6} \approx 0.067$

$P(C)\ \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0.04}{0.05} = 0.8$

Lösung 23

(i) *P(Punkt empfangen, falls Punkt gesendet)* $= 0.95$

(ii) *P(Strich empfangen, falls Strich gesendet)* $= 0.97$

Andere Möglichkeit:

(i) $P = \frac{\frac{3}{8} \cdot 0.95}{\frac{3}{8} \cdot 0.95 + \frac{5}{8} \dot{0}.03} = 0.95$

(ii) $P = \frac{\frac{5}{8} \cdot 0.97}{\frac{5}{8} \cdot 0.97 + \frac{3}{8} \dot{0}.05} = 0.97$

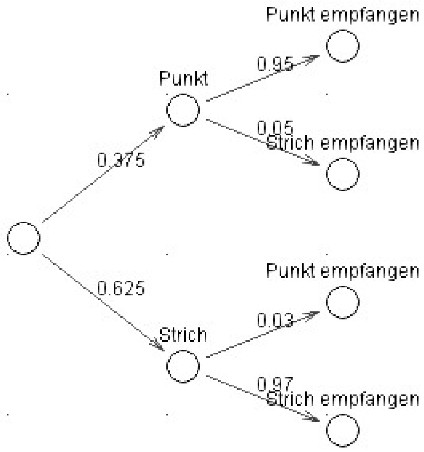

Abbildung C.2: Ereignisbaum Lösung 23

Lösung 24

I: Urne I wird ausgewählt
II: Urne II wird ausgewählt
W: Kugel ist weiß
S: Kugel ist schwarz

$P(I) = \frac{1}{2}$; $P(II) = \frac{1}{2}$

$P(W|I) = \frac{4}{6}$; $P(S|I) = \frac{2}{6}$

$P(W|II) = \frac{1}{6}$; $P(S|II) = \frac{5}{6}$

(i) $P(I|W) = \frac{P(I)\cdot P(W|I)}{P(I)\cdot P(W|I)+P(II)\cdot P(W|II)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{5}{6}} = 0.8$

(ii) $P(II|W) = \frac{P(II)\cdot P(W|II)}{P(II)\cdot P(W|II)+P(I)\cdot P(W|I)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = 0.2$

(iii) $P(I|S) = \frac{P(I)\cdot P(S|I)}{P(I)\cdot P(S|I)+P(II)\cdot P(S|II)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{7}{6}} = \frac{2}{7} \approx 0.29$

(iv) $P(II|S) = \frac{5}{7} \approx 0.71$

Lösung 25

$P(A \cap B) = P(\{1,4\}) = \frac{1}{6}$

$P(A)P(B) = \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ *A, B unabhängig*

Lösung 26

$P(T_2 \cap T_3) = P(\{6, 12, \ldots, 30\}) = \frac{1}{6}$; $P(T_2)P(T_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(T_2 \cap T_5) = P(\{10, 20, 30\}) = \frac{1}{10}$; $P(T_2)P(T_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P(T_3 \cap T_5) = P(\{15, 30\}) = \frac{1}{5}$; $P(T_3)P(T_5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(T_2 \cap T_3 \cap T_5) = \frac{1}{30}$; $P(T_2)P(T_3)P(T_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$

$\Rightarrow T_2, T_3, T_5$ *unabhängig*

Lösung 27 *P(Kopf passt und Mutter passt) = P(Kopf passt)P(Mutter passt)* $= 0.9 \cdot 0.95 = 0.855$

Lösung 28 $\Omega = \{KK, ZZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ\}$

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$

Lösung 29

x	$P(X = x)$	y	$P(Y = y)$
0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{18}{27}$	1	$\frac{12}{27}$
2	$\frac{3}{27}$	2	$\frac{6}{27}$
		3	$\frac{1}{27}$

X und Y sind abhängig. Es gilt etwa

$P(X = 0$ *und* $Y = 0) = 0$, $P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{6}{27} \cdot \frac{8}{27} \neq 0$

Lösung 30 $EX = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \ldots + 10 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}(1 + 2 + \ldots + 10) = \frac{55}{10} = 5.5$

y	$P(Y = y)$	$y \cdot P(Y = y)$
1	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
2	$\frac{3}{100}$	$\frac{6}{100}$
3	$\frac{5}{100}$	$\frac{15}{100}$
4	$\frac{7}{100}$	$\frac{28}{100}$
5	$\frac{9}{100}$	$\frac{45}{100}$
6	$\frac{11}{100}$	$\frac{66}{100}$
7	$\frac{13}{100}$	$\frac{91}{100}$
8	$\frac{15}{100}$	$\frac{120}{100}$
9	$\frac{17}{100}$	$\frac{153}{100}$
10	$\frac{19}{100}$	$\frac{190}{100}$
$\sum$	1	$\frac{715}{100}$

$\Rightarrow EY = 7.15$

Lösung 31

(i) Sei X die Ausschüttung pro Spiel

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
5	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{100}$
2	$\frac{9}{100}$	$\frac{18}{100}$
0.5	$\frac{18}{100}$	$\frac{9}{100}$
0	$\frac{72}{100}$	0
$\sum$	*1*	$\frac{32}{100} = 0.32$

$EX = 0.32$

(ii) Ist Y *der Reingewinn des Automatenbesitzers, so gilt* $Y = 0.50 - X \Rightarrow E(0.5 - X) = 0.5 - EX = 0.18 \Rightarrow$ *Spiel rentabel*

Lösung 32 $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$; $|\Omega| = 36$, *X: Produkt der beiden Augenzahlen*

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$\frac{12}{36}$
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{10}{36}$
6	$\frac{4}{36}$	$\frac{24}{36}$
8	$\frac{2}{36}$	$\frac{16}{36}$
9	$\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
10	$\frac{2}{36}$	$\frac{20}{36}$
12	$\frac{4}{36}$	$\frac{48}{36}$
15	$\frac{2}{36}$	$\frac{30}{36}$
16	$\frac{1}{36}$	$\frac{16}{36}$
18	$\frac{2}{36}$	$\frac{36}{36}$
20	$\frac{2}{36}$	$\frac{40}{36}$
24	$\frac{2}{36}$	$\frac{48}{36}$
25	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
30	$\frac{2}{36}$	$\frac{60}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$
$\sum$	1	$\frac{441}{36} = 12.25$

Durchschnittliche Auszahlung pro Spiel = 12.25 €= Einsatz für faires Spiel.

Lösung 33 $\Omega = \{K, ZK, ZZK, ZZZK, \ldots\}$, *X: Anzahl der Würfe*

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
1	$\frac{1}{2}$	$1 \cdot \frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$2 \cdot \frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$3 \cdot \frac{1}{8}$
$\vdots$		
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\vdots$		
$\sum$	*1*	

gesucht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = EX$$

generell gilt (Taylor!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1$$

$\Rightarrow (1 + \sum_{n=1}^{\infty})' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

also $EX = 2$ *(durchschnittliche Zahl von Würfen)*

(Man kann auf die Zahl auch kommen, indem man mit dem Taschenrechner die ersten 10-15 Summanden aufsummiert (schnelle Konvergenz))

Lösung 34 $EX = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot (-a) = 0 \Rightarrow Var\ X = E(X^2) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$

Lösung 35

(i) *X: Ausschüttung*

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
200	$\frac{1}{1000}$	$\frac{200}{1000}$
5	$\frac{50}{1000}$	$\frac{250}{1000}$
1	$\frac{50}{1000}$	$\frac{50}{1000}$
0	$\frac{899}{1000}$	0
$\sum$	*1*	$\frac{1}{2}$

EX= 0.50 €

(ii) *Y: Gewinn pro Spiel für den Betreiber*

y	$P(Y=y)$	$y \cdot P(Y=y)$
-199	$\frac{1}{1000}$	$-\frac{199}{1000}$
-4	$\frac{50}{1000}$	$-\frac{200}{1000}$
0	$\frac{50}{1000}$	0
1	$\frac{899}{1000}$	$\frac{899}{1000}$
$\sum$	*1*	$\frac{1}{2}$

EY= 0.50 €

(iii)

x^2	$P(X^2=x^2)$	$x^2 \cdot P(X^2=x^2)$
40000	$\frac{1}{1000}$	40
25	$\frac{50}{1000}$	1.25
1	$\frac{50}{1000}$	0.05
0	$\frac{899}{1000}$	0
$\sum$	*1*	41.3

$Var\ X = E(X^2) - (EX)^2 = 41.3 - 0.5^2 = 41.05$

Lösung 36 *X: ausgewählte Zahl*

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$	x^2	$x^2 P(X^2=x^2)$
1	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{n}$
2	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	4	$\frac{4}{n}$
3	$\frac{1}{n}$	$\frac{3}{n}$	9	$\frac{9}{n}$
$\vdots$				
n	$\frac{1}{n}$	$\frac{n}{n}$	n^2	$\frac{n^2}{n}$
$\sum$	*1*	$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$		

$EX = \frac{n+1}{2}$

$E(X^2) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$Var\ X = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(2n^2+n+2n+1)-3(n^2+2n+1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$

Lösung 37 $P(|X-5|<3) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$P(|X-5|<c) \geq 1 - \frac{4}{c^2} \overset{!}{\geq} 0.9$ *falls* $\frac{4}{c^2} \leq 0.1 \Rightarrow c^2 \geq 40 \Rightarrow c \geq \sqrt{40}$

Lösung 38 $\mu = 3.5;\ \sigma^2 = \frac{35}{12}$‡

$P(|X_3.5| \leq 2.5) = P(X = 1,2,3,4,5,6) = 1$ *Tschebyschew:* $P(|X-3.5| \leq 2.5) > 1 - \frac{35}{12\cdot(2.5)^2} = \frac{40}{75} = \frac{8}{15} \approx 0.53$

Lösung 39 $P(|X-4.5|>0.2) < \left(\frac{0.08}{0.2}\right)^2 = \left(\frac{8}{20}\right)^2 = (0.4)^2 = 0.16$. *Ausschuss-Anteil höchstens 16%.*

Lösung 40 $P\left(\left|\overline{X} - 150\right| < 20\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4-20^2} = 1 - \frac{100}{1600} = \frac{15}{16} \approx 0.94$ *(=Mindestwahrscheinlichkeit)*

$P\left(2240 < \sum_{i=1}^{16} X_i < 2560\right) = P\left(140 < \overline{X} < 160\right) = P\left(\left|\overline{X} - 150\right| < 10\right) \geq 1 - \frac{10^2}{16\cdot 10^2} = \frac{15}{16} \approx 0.94$

Lösung 41 $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 50\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\cdot 50^2} > 1 - \frac{100^2}{50^2\cdot n} \overset{!}{\geq} 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{4}{n} \geq 0.95 \Rightarrow \frac{4}{n} \leq 0.05 \Rightarrow n \geq \frac{4}{0.05} = 80$ *(=Mindestanzahl der Testlampen)*

Lösung 42

x	*0*	*3*	*6*	*201*
P(X=x)	*0.95*	*0.04*	*0.009*	*0.001*

$EX = 0\cdot 0.05 + 3\cdot 0.04 + 6\cdot 0.009 + 201\cdot 0.001 = 0.375$ $Var\ X = E(X^2) - 0.375^2 = 0^2\cdot 0.95 + 3^2\cdot 0.04 + 6^2\cdot 0.009 + 201^2\cdot 0.001 - 0.375^2 = 40.94$

$P(|X-\mu| < 0.5) \geq 1 - \frac{40.94}{n\cdot 0.5^2} \overset{!}{\geq} 0.9 \Rightarrow \frac{40.94}{0.25\cdot n} \leq 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{40.94}{0.25\cdot 0.1} \approx 1638$

(Antwort nach 1638 Spielen)

Lösung 43 $EX = 0.1\cdot 1 + 0.15\cdot 2 + 0.15\cdot 3 + 0.15\cdot 4 + 0.15\cdot 5 + 0.3\cdot 6 = 0.1 + 0.15\cdot 14 + 1.8 = 4$

$Var\ X = 0.1\cdot 1 + 0.15\cdot 4 + 0.15\cdot 9 + 0.15\cdot 16 + 0.15\cdot 25 + 0.3\cdot 36 - 4^2 = 3$

Lösung 44 *(i)* $\Omega = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,2,1),\ldots,(4,4,4)\}$. $|\Omega| = 4^3 = 64$

(ii) $P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0.016$. $P(B) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.14$. $P(C) = 4\cdot P(B) + 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0.625$. $P(D) = 6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0.094$.

‡siehe Vorlesung

(iii) $P(\textit{mind. einmal } 4) = 1 - P(\textit{keinmal } 4) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \overset{!}{\geq} 0.9 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^3 \leq 0.1 \Rightarrow n \cdot \ln\frac{3}{4} \leq \ln 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.75} = 8.0039 \Rightarrow$ *9 Mal werfen.*

Lösung 45 $P(A) = \binom{6}{1} frac16 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.40. P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.67. P(C) = P(A) + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.74$

Lösung 46 $P = 1 - (1 - 0.03)^5 \approx 0.14$ *Für n=10000, p=0.0003:* $P = 1 - (1 - 0.0003)^{10000} \approx 0.95$

Lösung 47 $P(A) = (0.95)^{10} \approx 0.95. P(B) = (0.95)^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.05 \cdot (0.95)^{19} \approx 0.74$

Lösung 48 $1 - (0.9)^n \geq 0.9 \Rightarrow (0.9)^n \leq 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.9} = 21.8 \Rightarrow$ *22 Spiele.*

Lösung 49
$P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.067.\ P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.33.\ P(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.48$

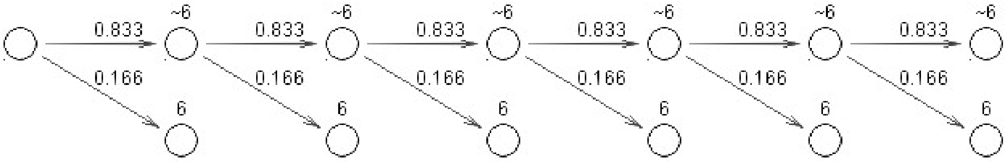

Abbildung C.3: Ereignisbaum Lösung 49

Andere Überlegung: P(frühestens beim 5 Wurf Sechser) = P(beim 1. Wurf keine Sechs <u>und</u> beim 2. Wurf keine Sechs <u>und</u> beim 3. Wurf keine Sechs <u>und</u> beim 4. Wurf keine Sechs) $= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.48.$

Lösung 50 $P = \frac{1}{\binom{18}{4}} = \frac{1}{3060}.\ 1 - \left(\frac{3059}{3060}\right)^n \geq 0.99 \Rightarrow \left(\frac{3059}{3060}\right)^n \leq 0.01 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.01}{\ln\frac{3059}{3060}} = 14089.5 \Rightarrow$ *14090 Spieler.*

Für „Dreier“: $P = \frac{\binom{4}{3}\binom{14}{1}}{\binom{18}{4}} = \frac{56}{3060}.\ 1 - \left(\frac{3004}{3060}\right)^n \geq 0.99 \Rightarrow \left(\frac{3004}{3060}\right)^n \leq 0.01 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.01}{\ln\frac{3004}{3060}} = 249.3 \Rightarrow$ *250 Spieler.*

Lösung 51

(i) *P(Zurückweisung)* $= P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx$ [§] $1 - 0.935 = 0.065$ *(exakter Wert: 0.079)*

(ii) *P(Annahme)* $= P(X \leq 2) \approx$ [¶] 0.115 *(exakter Wert: 0.118)*

Lösung 52

(i) $P(X = 6) = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64} \approx 0.016$

(ii) $P(X \leq 3) \approx$ [‖] 0.68 *(exakter Wert: 0.66)*

(iii) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0.016 = 0.984$

Lösung 53 $P(40 \leq X \leq 120) = P\left(\frac{1}{10} \leq \frac{X}{400} \leq \frac{3}{10}\right) = P\left(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{5}\right| \leq \frac{1}{10}\right) > 1 - \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{400\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 1 - \frac{4}{25\cdot 4} = 1 - 0.04 = 0.96$

[§] n=100, p=0.01, Larson
[¶] n=100, p=0.05, Larson
[‖] Larson

Lösung 54 $P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right)\geq 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n\cdot 0.01^2}\stackrel{!}{\geq}0.8\Rightarrow\frac{\frac{5}{36}}{0.0001\cdot n}\leq 0.2\Rightarrow n\geq\frac{5\cdot 10000}{36\cdot 0.2}=6944.4$ *also* $n\geq 6945$

Lösung 55 $p=\frac{1}{5}, P\left(\left|\frac{X}{1000}-\frac{1}{5}\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1000\cdot\epsilon^2}\stackrel{!}{>}0.9\Rightarrow\frac{4}{25000\cdot\epsilon^2}<0.1\Rightarrow\epsilon^2>\frac{4}{2500}\Rightarrow\epsilon>\frac{2}{50}=0.04$
also $-0.04<\frac{X}{1000}-\frac{1}{5}<0.04\Rightarrow 0.16<\frac{X}{1000}<0.26\Rightarrow 160<X<240$
also zwischen 161 und 239 Kugeln mit 90% Sicherheit.

Lösung 56 $P(X>2)=1-P(X\leq 2)\approx{}^{**}1-0.12=0.88$ *(exakter Wert: 0.875)*

Lösung 57 $P(X>5)=1-P(X\leq 6)\approx{}^{\dagger\dagger}1-0.0075=99.25$

Lösung 58 *300 Anrufe / h = 5 Anrufe / min.* $\Rightarrow\mu=5; P(X>10)=P(X\leq 10)\approx{}^{\ddagger\ddagger}1-0.985=0.015$ *(exakter Wert: 0.0137)*

Lösung 59 $p=\frac{1}{100}; P(X\geq 1)=1-P(X=0)\approx\text{(Poisson) }1-\frac{\mu^0}{0!}\cdot e^{-\mu}=1-e^{-\mu}\geq 0.5\Rightarrow e^{-\mu}\leq 0.5\Rightarrow-\mu\leq\ln 0.5\Rightarrow\mu\geq-\ln 0.5=0.6931\Rightarrow np\geq 0.6931\Rightarrow n\geq 0.6931\cdot 100\Rightarrow n\geq 70$

Lösung 60 $P(X\leq 2)=n=100, p=0.01=\binom{100}{0}0.01^0 0.99^{100}+\binom{100}{1}0.01^1 0.99^{99}+\binom{100}{2}0.01^2 0.99^{98}=0.92063$ *(exakt)*
mit Poisson-Näherung: $\mu=np=1\Rightarrow P(X\leq 2)=e^{-1}+e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{5}{2e}=0.91970$
mit Thorndike-Diagramm: $P(X\leq 2)\approx 0.92$

Lösung 61 *(i)* 0.88

(ii) 0.8852

(iii) $\mu=12.5;\sigma^2=\frac{25}{4};\sigma=\frac{5}{2}; P(X\leq 15)=\Phi\left(\frac{12-12.5+0.5}{2.5}\right)=\Phi(1.2)=0.8849$

Lösung 62 $\mu=200;\sigma^2=1200\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=166.66;\sigma=12.91$

(i) $P(X=180)\approx\frac{1}{12.91}\varphi\left(\frac{180-200}{12.91}\right)=\frac{1}{12.91}\varphi(-1.55)=\frac{1}{12.91}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}1.55^2}\approx 0.0093$

(ii) $P(X=180)=\Phi\left(\frac{180-200+0.5}{12.91}\right)-\Phi\left(\frac{180-200-0.5}{12.91}\right)=\Phi(-1.51)-\Phi(-1.59)=0.0655-0.0559=0.0096$

Lösung 63 $n=100;\mu=10;\sigma^2=100\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=9;\sigma=3$

(i) $P(X\leq 16)=0.98$

(ii) $P(X\leq 16)\approx\Phi\left(\frac{16-10+0.5}{3}\right)=\Phi(2.17)\approx 0.985$

Lösung 64 $P(180\leq X\leq 220)=P(|X-200|\leq 20)=n=100, p=\frac{1}{6}\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{20+0.5}{\sqrt{1200\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)-1=2\cdot\Phi(1.59)-1\approx 0.89$

Lösung 65 $P(|X-\mu|\leq 30)=n=4000, p=\frac{1}{2}\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{30+0.5}{\sqrt{4000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)-1=2\cdot\Phi(0.96)-1\approx 0.66$

Lösung 66 $P(|X-\mu|\leq c)=P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\leq\frac{c}{n}\right)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-1\Rightarrow P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\leq t\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{tn+0.5}{\sigma}\right)-1\Rightarrow P\left(\left|\frac{X}{1200}-\frac{1}{6}\right|\leq\frac{1}{60}\right)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{\frac{1}{60}\cdot 1200+0.5}{\sqrt{1200\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)-1=2\cdot\Phi(1.59)-1=0.89$

Lösung 67 $P(|X-\mu|\leq 15)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{15+0.5}{\sqrt{n\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}}\right)-1=0.99\Rightarrow\Phi\left(\frac{41.6}{\sqrt{n}}\right)=0.995\Rightarrow\frac{41.6}{\sqrt{n}}=2.575\Rightarrow\sqrt{n}=16.15\Rightarrow n=260.9\Rightarrow n=261$

$^{**}n=1000, p=0.005, \mu=np=5$, Thorndike
$^{\dagger\dagger}n=5000, p=\frac{1}{365}, \mu=np\approx 13.7$, Thorndike
‡‡Thorndike

Lösung 68 $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\le t\right) \approx {}^{\dagger}2\cdot\Phi\left(\frac{tn+0.5}{\sigma}\right)-1 \approx 2\cdot\Phi\left(\frac{tn}{\sqrt{npq}}\right)-1 = 2\cdot\Phi\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)-1 \Rightarrow P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|\le 0.01\right)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right)-1 \overset{!}{\ge} 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\frac{5}{36}}\right)\ge 0.975 \Rightarrow \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{5}{36}}}\ge 1.96 \Rightarrow \sqrt{n}\ge 1.96\cdot 100\cdot\sqrt{\frac{5}{36}} \Rightarrow n\ge 196^2\cdot\frac{5}{36}=5335.55\Rightarrow n\ge 5336$
(Die Ungleichung von Tschebyschew würde hier liefern: $n \ge 27778$)

Lösung 69 $P\left(|X-\mu|\le c\right)\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)-1 = 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sqrt{4000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)-1 = 0.5 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sqrt{1000}}\right) = 0.75 \Rightarrow \frac{c+0.5}{10\sqrt{10}} = 0.675 \Rightarrow c+0.5 = 6.75\sqrt{10}\Rightarrow c = 20.84 \Rightarrow {}^{\ddagger}$ *Intervall* $[1979, 2021]$

Lösung 70 $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\le\frac{1}{1000}\right)\approx {}^{\S}2\cdot\Phi\left(\frac{\frac{1}{1000}\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)-1\overset{!}{\ge}0.99\Rightarrow\Phi\left(\frac{\frac{1}{1000}\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)\ge 0.995\Rightarrow\frac{\frac{1}{1000}\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\ge 2.575\Rightarrow\sqrt{n}\ge 1000\cdot 2.575\cdot\sqrt{pq}\ge 2575\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow n\ge 1657657$

Lösung 71 $EX=\mu=1.5.$

(x_1,x_2)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$P\left((X_1,X_2)=(x_1,x_2)\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$U=\max(X_1,X_2)=\begin{cases}1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{4}\\ 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{3}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow EU = 1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{4}=1.75\neq\mu$

Lösung 72 $EX=\mu=\frac{2}{3}. Var\ X=\sigma^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$

(x_1,x_2,x_3)	$P\left((X_1,X_2,X_3)=(x_1,x_2,x_3)\right)$	$\overline{x}$	s^2
$(0,0,0)$	$\frac{1}{27}$	0	0
$(0,0,1)$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(0,1,0)$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(1,0,0)$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(0,1,1)$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(1,0,1)$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(1,1,0)$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(1,1,1)$	$\frac{8}{27}$	1	0

$\overline{x}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

$E\overline{X}=\frac{2}{3}=\mu$

s^2	0	$\frac{1}{3}$
$P(S^2=s^2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$E(S^2)=\frac{2}{9}=\sigma$

† siehe Aufgabe 66
‡ $\mu = 2000$
§ siehe Aufgabe 68

s	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$P(S=s)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$ES = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{3}$

Lösung 73 $\overline{x} = 73.23\ kg$; $\frac{\overline{x}-\xi}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{72.23-75}{\frac{8}{\sqrt{30}}} = -1.21$; $\lambda_{95\%} = 1.96$

Hypothese wird angenommen (keine Gewichtsveränderung).

Lösung 74 $S^2 = 77.84 \Rightarrow S = 8.82$

$\frac{\overline{x}-\xi}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{73.23-75}{\frac{8.82}{\sqrt{30}}} = -1.1,\ \gamma_{95\%}^{(29)} = 2.045$

Hypothese wird angenommen.

Anhang D

Geschichte

- Gerolamo Cardano:

  „Liber de lude aleae“

Abbildung D.1: Gerolamo Cardano (1501-1576)

- Chevalier de Mere: Spieler beklagt sich bei Blaise Pascal* (1623 - 1662) im Jahre 1654. Man wusste:

  Bei Spiel mit einem Würfel günstig : bei 4 Würfen mindestens 1 Sechs (0.518).

  Die Frage war, ob hier dasselbe galt:

  bei Spiel mit 2 Würfeln: bei 24 Würfen mindestens 1 Doppelsechs (0.492)?

  Missverständnis gelöst von Pascal und Pierre de Fermat.

Abbildung D.2: Pierre de Fermat (1601-1665)

- Christiaan Huygens:

  „De rationimus in lude aleae“

  Jahrzehntelang das Wahrscheinlichkeitstheorie Buch. Er erkannte erstmals , dass Wahrscheinlichkeitstheorie nicht nur für Spielprobleme interessant ist.

- Jacob Bernoulli†:

  „De arte combinatoria“

*siehe Seite 8
†siehe Seite 35

Abbildung D.3: Christiaan HUYGENS (1629-1695)

Gesetz der großen Zahl: Verbindung zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|H_n(A) - p| < \epsilon\right) = 1$$

- Edmun Halley: Beschreibende Statistik, Geburts- / Sterbestatistik für Breslau.

Abbildung D.4: Christiaan HUYGENS (1656-1742)

- Anfänge der beschreibenden Statistik:
  - Volkszählung 3050 v. Chr
  - Agypten: Personelle Voraussetzungen für Pyramidenbau
  - Römer: Steuerlisten
- Belgien (1835): Soziologische Probleme mit statistischen Methoden. Konstruktion des „mittleren“ Menschen.
- Durchbruch: Biologie / Vererbungslehre

  Francis Galton, Karl Pearson, Ronald A. Fisher‡: Stichproben, Hypothesen, Testen

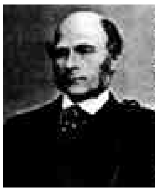

Abbildung D.5: Francis GALTON (1822-1911)

- Zurück zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Abraham de Moivre: Gewinnsysteme für Roulette verkauft, entdeckt Normalverteilung (Gauss§: später nur Bedeutung), Moivre-Laplace¶-Grenzwertsätze
- Nikolaus Bernoulli, Daniel Bernoulli: Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Rechtssprechung.

Abbildung D.6: Karl Pearson (1857-1936)

Abbildung D.7: Abraham de Moivre (1667-1754)

Abbildung D.8: Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

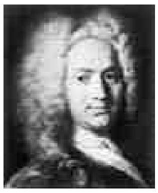

Abbildung D.9: Nicolaus Bernoulli (1687-1759)

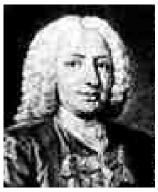

Abbildung D.10: Daniel Bernoulli (1700-1782)

- Pierre Simon de Laplace[‖] (1749-1827): Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie. Methode der kleinsten Quadrate, Axiomatik, Anwendungen in Bevölkerungsstatistik und Astronomie.

[‡]siehe Seite 73
[§]siehe Seite 108
[¶]siehe Seite 4
[‖]siehe Seite 4

- Gauss (1777-1855): Normalverteilung (erkannte die Bedeutung), zentraler Grenzwertsatz
- Poisson** (1781-1840):
- James Clerk Maxwell: Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle in einem idealen Gas (1920 von Otto Stern experimentell bestätigt)

Abbildung D.11: James Clerk MAXWELL (1831-1879)

- Tschebyschef†† (1821-1894): Begründer der russischen Schule der Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Kolmogorov‡‡ (1903-1987): Axiomensystem von heute.
- Physik: Aufenthalswahrscheinlichkeiten von Elektronen (Orbitalmodell)
- Einstein: Stochastische Prozesse

Abbildung D.12: Albert EINSTEIN (1879-1955)

- Prozesse: schwach stationäre Prozesse
- Raumfahrt: Zustandsraum-Modelle
- Viel Mist (Medizin): Nicht Mathematik, sondern Leute, die sie nicht verstehen!

**siehe Seite 46
††siehe Seite 31
‡‡siehe Seite 45

Abbildungsverzeichnis

Index