Geht die Sau durch?

Beim Schafkopfen gibt es die ungeschriebene Regel, dass die Spieler nicht suchen. Wie groß ist jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass die Sau trotzdem durchgeht? Ich werde mich bei der Lösung des Problems auf den Fall des ersten Stichs beschränken.
Mathematische Präzisierung des Problems: Beim Schafkopfen gibt es 4 Farben zu je 6 Karten und 8 Trümpfe. Der Spieler bestimmt seinen Mitspieler durch Nennung der Sau (As) einer bestimmten Farbe (im folgenden: die Spielfarbe), von der er mindestens eine Karte besitzen muss. Wird eine Karte der Spielfarbe angespielt (Suchen), muss Farbe zugegeben werden, die gesuchte Sau muss gespielt werden. Falls die Nichtspieler jeweils mindestens eine Karte der Spielfarbe haben, gehört der Stich den Spielern (der Stich geht durch). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Nichtspieler je mindestens eine Karte der Spielfarbe haben, unter der Bedingung, dass die Spieler je mindestens eine Karte haben.

Ohne weitere Taktik

Da von den 6 Karten der Spielfarbe schon zwei bei den Spielern sind, sind noch 4 Karten auf alle 4 Spieler zu verteilen. Dies sind $\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35$ Möglichkeiten.

Günstig für die Spieler ist die Konstellation, wenn die beiden Nichtspieler jeweils eine Karte haben. Die verbleibenden 2 Karten können sich auf alle 4 Spieler verteilen. Dies sind $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sau durchgeht beträgt also $\frac{10}{35} = \frac{2}{7} \approx 28\%$.

Mit Taktik

Der Spieler muss mindestens eine Karte der Spielfarbe auf der Hand haben. Er weiß als einziger, wie viele Karten er genau hat. Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass die Sau durchgeht, wenn der Spieler genau k Karten der Spielfarbe auf der Hand hat.

$P_{\text{"genau eine Karte"}}(\text{" geht durch "}) = \dfrac{\binom{2+3-1}{2}}{\binom{4+3-1}{4}} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{6}{15} = 40\%$ Erklärung: 4 Karten sind auf drei Spieler zu verteilen, davon sind die Fälle günstig, in denen die Nichtspieler je mind. eine Karte haben, also sind 2 Karten auf 3 Spieler zu verteilen.

$$P_{\text{"genau zwei Karten"}}(\text{" geht durch "}) = \dfrac{\binom{1+3-1}{1}}{\binom{3+3-1}{3}} = \dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10} = 30\%$$

$$P_{\text{"genau drei Karten"}}(\text{" geht durch "}) = \dfrac{\binom{0+3-1}{0}}{\binom{2+3-1}{2}} = \dfrac{\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \approx 17\%$$

$$P_{\text{"mehr als drei Karten"}}(\text{" geht durch "}) = 0\%$$

Probe am Baumdiagramm

Zum vollständigen Baumdiagramm müssen noch die Wahrscheinlichkeiten, dass der Spieler genau k Karten erhält, bestimmt werden.

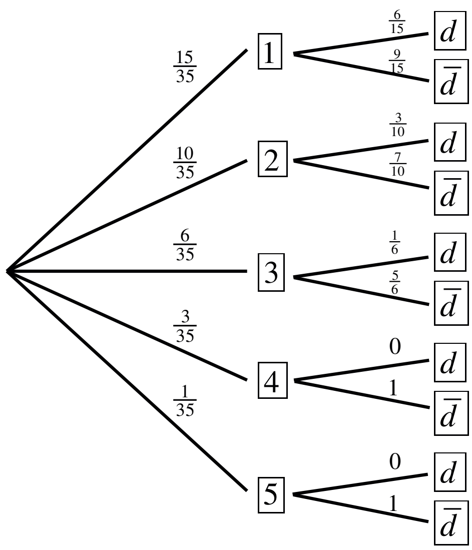
$P(\text{"genau eine Karte"}) = \frac{\binom{4+3-1}{4}}{\binom{4+4-1}{4}} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{7}{4}} = \frac{15}{35}$ Erklärung: 4 Karten werden auf 4 Spieler verteilt, davon sind die Fälle günstig, in denen der Spieler keine erhält, denn eine hat er ja eh schon. Also werden 4 Karten auf drei Personen verteilt.

$$P(\text{"genau zwei Karten"}) = \frac{\binom{3+3-1}{3}}{\binom{4+4-1}{4}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{4}} = \frac{10}{35}$$

$$P(\text{"genau drei Karten"}) = \frac{\binom{2+3-1}{2}}{\binom{4+4-1}{4}} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{6}{35}$$

$$P(\text{"genau vier Karten"}) = \frac{\binom{1+3-1}{1}}{\binom{4+4-1}{4}} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{4}} = \frac{3}{35}$$

$$P(\text{"genau fünf Karten"}) = \frac{\binom{0+3-1}{0}}{\binom{4+4-1}{4}} = \frac{\binom{2}{0}}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{35}$$



$$P(d) = \frac{15}{35}\cdot\frac{6}{15} + \frac{10}{35}\cdot\frac{3}{10} + \frac{6}{35}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{35}\cdot 0 + \frac{1}{35}\cdot 0 = \frac{6}{35} + \frac{3}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{7} \approx 28\%$$